5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε συνάρτηση f: $A \to B$ με $A \subseteq \mathbf{R}^n$ και $B \subseteq \mathbf{R}$ ονομάζεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(I) Αν $A \subseteq \mathbf{R}^n$ και $B \subseteq \mathbf{R}^n$ τότε έχουμε διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών.

(II) Αν $A \subseteq \mathbf{R}$ και $B \subseteq \mathbf{R}^n$ τότε έχουμε διανυσματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής.

(III) Εδώ θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $A \subseteq \mathbf{R}$ και $B \subseteq \mathbf{R}^2$ δηλαδή με πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $y=f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$

y: εξαρτημένη μεταβλητή

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: ανεξάρτητες μεταβλητές

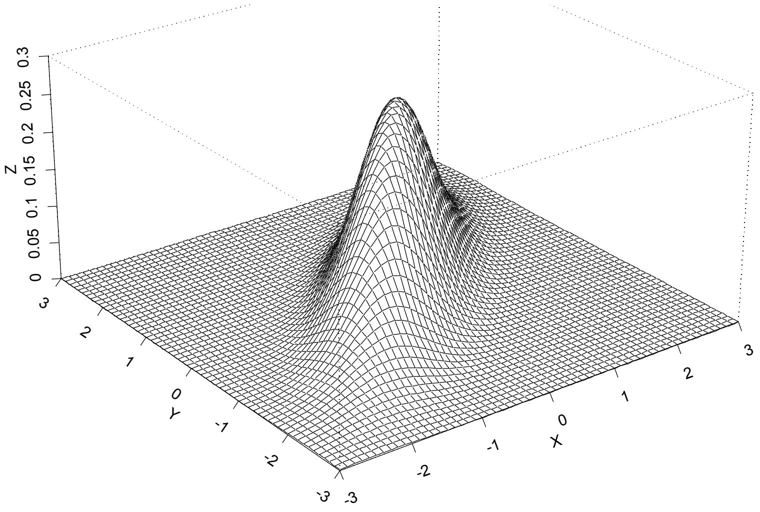
[Για n=2 εναλλακτικά $z=f(x,y)$].

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (IV): Για n=2 η γραφική παράσταση είναι τρισδιάστατη (μήκος, πλάτος και ύψος). Εναλλακτική απεικόνιση γίνεται με τα διαγράμματα ισοϋψών καμπύλων (contour plots).

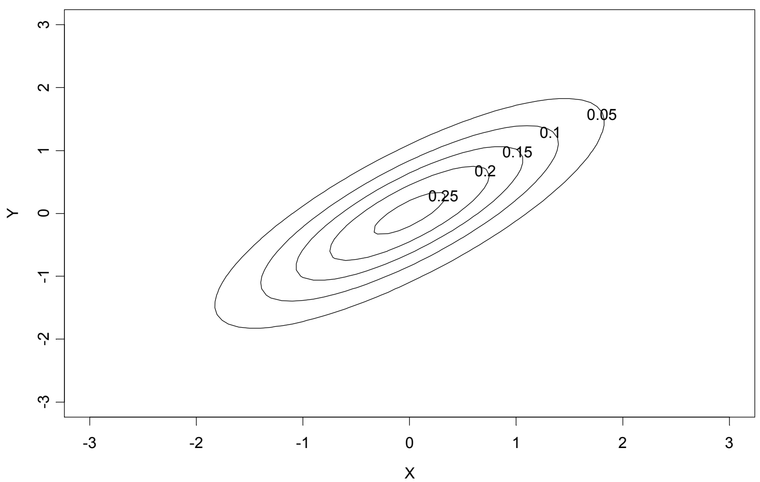
ΟΡΙΣΜΟΣ: Ισοϋψείς καμπύλες με ύψος c αποτελούνται από όλα τα σημεία (x_1,x_2,c) για τα οποία ισχύει $f(x_1,x_2)=c$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ:

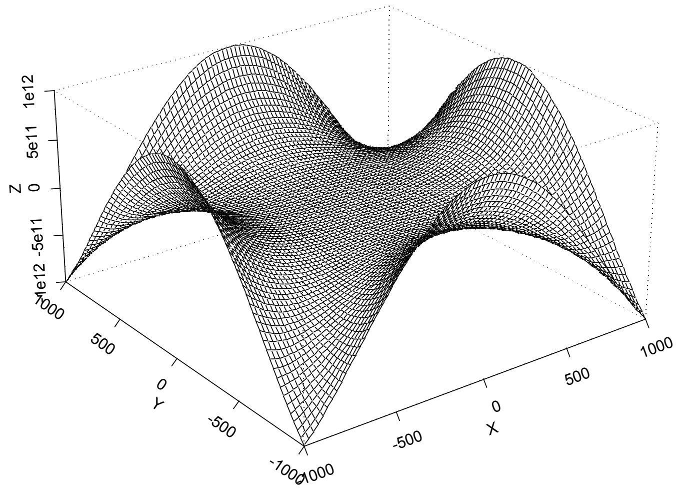
1. Καμπύλες ίσου κέρδους
2. Καμπύλες ίσης Παραγωγής
3. Καμπύλες ίσου κόστους
4. Καμπύλες ίσης χρησιμότητας
5. Καμπύλες ίσων εσόδων.



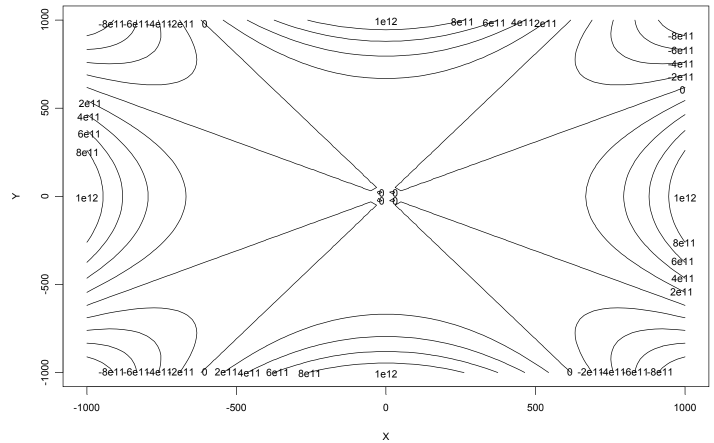
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2: Διάγραμμα Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της Διμεταβλητής Κανονικής Κατανομής για ρ=0.80.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1: Διάγραμμα Ισοϋψών Καμπύλων της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της Διμεταβλητής Κανονικής Κατανομής για ρ=0.80.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3 : Διάγραμμα της Συνάρτησης x^4-$3x^2y^2$+y^4 .



. **ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4:** Διάγραμμα ισοϋψών Καμπύλων της Συνάρτησης x^4-$3x^2y^2$+y^4

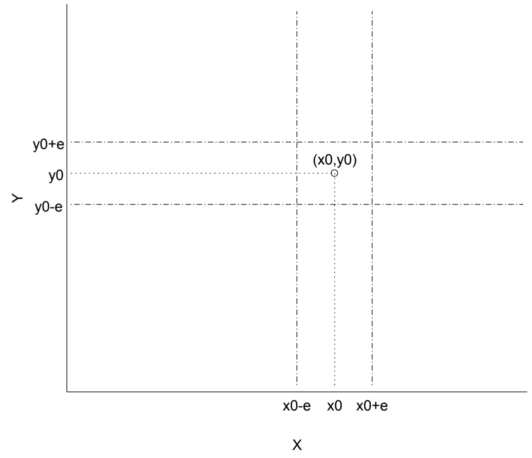
5.2 ΣΗΜΕΙΑ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5.2.1 ΠΕΡΙΟΧΗ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

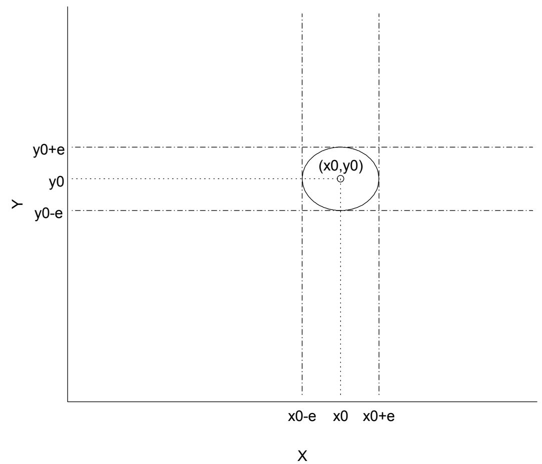
ΟΡΙΣΜΟΣ: Περιοχή ενός σημείου $(x_0,y_0)\in \mathbf{R}^2$ ονομάζεται ένα υποσύνολο $\Pi(x_0,y_0)$ του $\mathbf{R}^2$ που περιέχει το σημείο (x_0,y_0) και τα κοντινά σε αυτό.

Η περιοχή που ορίζεται από τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν τις συνθήκες $|x-x_0|<\varepsilon$ και $|y-y_0|<\varepsilon$ για $\varepsilon>0$ ορίζουν μια τετραγωνική περιοχή γύρω από το σημείο (x_0,y_0).

Η περιοχή που ορίζεται από τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν τη συνθήκη $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta$ για $\delta>0$ ορίζουν μια κυκλική περιοχή με κέντρο το σημείο (x_0,y_0) και ακτίνα δ.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5: Διαγραμματική Απεικόνιση τετραγωνικής περιοχής ενός σημείου



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6: Διαγραμματική Απεικόνιση Κυκλικής περιοχής ενός σημείου

5.2.2 ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σημείο $(x_0,y_0)\in A$ λέγεται εσωτερικό σημείο του συνόλου Α αν και μόνο αν υπάρχει $\Pi(x_0,y_0)$ η οποία είναι υποσύνολο του Α δηλαδή $\Pi(x_0,y_0)\subseteq A$.

5.2.3 ΣΗΜΕΙΑ ΟΛΙΚΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Για τη συνάρτηση f(x,y), το σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ λέγεται σημείο ολικού ελάχιστου αν $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ (ή ολικού μέγιστου αν $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$) για κάθε $(x,y)\in D(f)$.

5.3 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω η πραγματική συνάρτηση f(x,y) και το σημείο (x_0,y_0), τότε η συνάρτηση f συγκλίνει στην τιμή L όταν (x,y) προσεγγίζουν το (x_0,y_0) αν για κάθε ε>0 υπάρχει μια περιοχή του (x_0,y_0) τέτοια ώστε για κάθε σημείο (x,y) που ανήκει σε αυτή την περιοχή ισχύει $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to y_0}\left\{\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right\}=L.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι ιδιότητες που ισχύουν στη σύγκλιση συναρτήσεων μίας μεταβλητής ισχύουν και για τις σύγκλιση συναρτήσεων 2 μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση f(x,y) είναι συνεχής στο σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

5.4 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΙ ΒΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση γάμμα ορίζεται για x≥0

και δίδεται από τον τύπο: $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, για $x>1$
2. $\Gamma(\kappa+1)=\kappa!$, για κ φυσικό αριθμό
3. $\Gamma(0)=\Gamma(1)=1$
4. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση Βήτα ορίζεται για x,y≥0

και δίδεται από τον τύπο:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1. $B(x,y)=\Gamma(x)\,\Gamma(y)/\,\Gamma(x+y)$
2. $B(x,y)=B(y,x)$

5.5 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

5.5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

Έστω ότι έχουμε δύο αγαθά τότε με p_1 και p_2 συμβολίζουμε τις τιμές τους και με q_1 και q_2 τις ποσότητές τους. Τότε έχουμε:

- ☆ $D_1(p_1, p_2)$, $D_2(p_1, p_2)$ είναι οι συναρτήσεις ζητήσεως των δύο αγαθών.
- ☆ $S_1(p_1, p_2)$, $S_2(p_1, p_2)$ είναι οι συναρτήσεις προσφοράς των δύο αγαθών.
- ☆ $R(q_1, q_2)$ είναι η συνάρτηση εσόδων (έσοδα που προκύπτουν από την πώληση q_1 μονάδων του πρώτου αγαθού και q_2 μονάδων του δευτέρου αγαθού).
- ☆ $C(q_1, q_2)$ είναι η συνάρτηση κόστους (κόστος που προκύπτει από την παραγωγή q_1 μονάδων του πρώτου αγαθού και q_2 μονάδων του δευτέρου αγαθού).
- ☆ $U(q_1, q_2)$ είναι η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή.

☆ Π(x,y) (ή Q(x,y)) είναι η συνάρτηση παραγωγής από δύο συντελεστές παραγωγής (π.χ. κεφάλαιο και εργασία).

5.5.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΑΓΑΘΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο αγαθά ονομάζονται *ανταγωνιστικά* αν η αύξηση της τιμής του ενός συνεπάγεται αύξηση της ζήτησης του άλλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο αγαθά ονομάζονται *συμπληρωματικά* αν η αύξηση της τιμής του ενός συνεπάγεται μείωση της ζήτησης του άλλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο αγαθά ονομάζονται *ουδέτερα* αν δεν είναι ούτε ανταγωνιστικά ούτε συμπληρωματικά.

5.5.3 ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΑΔΙΑΦΟΡΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι ισοϋψείς καμπύλες μίας συνάρτησης χρησιμότητας δίνουν τις καμπύλες αδιαφορίας. Όλοι οι συνδυασμοί στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας μας δίνουν την ίδια χρησιμότητα για τον καταναλωτή.

5.6 ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω η πραγματική συνάρτηση z=f(x,y) και (x_0,y_0) ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Τότε η οριακή τιμή

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta, y_0)-f(x_0,y_0)}{\delta}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x_0,y_0).

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \text{ ή γενικότερα } \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(Ι): Όμοια έχουμε $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x,y+\delta)-f(x,y)}{\delta}$.

(ΙΙ): Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό της μερικής παραγώγου για συναρτήσεις περισσοτέρων από δύο μεταβλητές.

5.7 ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω f διαφορίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο (x,y), τότε η γραμμική απεικόνιση

$$g(dx,dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

ονομάζεται ολικό διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο (x,y).

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: df(x,y) ή df.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(I): Οι ποσότητες $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx$ και $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$ ονομάζονται και μερικά διαφορικά.

(II): Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τότε μπορούμε να γράψουμε: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

5.8 ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΣΕΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω η συνάρτηση f(x,y) οποία μπορεί να γραφτεί ως $f(x,y) = g(\ h_1(x,y),\ h_2(x,y)\ )$ τότε

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_1}\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_2}\frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x}$$

και

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_1}\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_2 y}\frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y}.$$

5.9 ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι συναρτήσεις οι οποίες γράφονται υπό τη μορφή $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)=0$, όπου y η εξαρτημένη μεταβλητή και δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς y, ονομάζονται πεπλεγμένες συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΕΠΛ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

Αν $f(x,y)=0$ τότε η παράγωγος dy/dx δίδεται από τον τύπο: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$.

Όμοια αν $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)=0$ τότε η μερική παράγωγος $\partial y/\partial x_i$ δίδεται από τον τύπο

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

5.10 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

5.10.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση παραγωγής $Q=\Pi(x_1,x_2,\ldots, x_k)$ εκφράζει την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος ως προς τους συντελεστές παραγωγής $x_1,x_2,\ldots, x_k$ (κεφάλαιο, εργασία, πρώτες ύλες κλπ.).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οριακή παραγωγικότητα του συντελεστή x_i ονομάζεται η μερική παράγωγος της συνάρτησης παραγωγής προς τον συντελεστή αυτό δηλαδή $\partial\Pi/\partial x_i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Συνήθως $\partial\Pi/\partial x_i > 0$ δηλαδή όσο αυξάνει ένας συντελεστής τόσο αυξάνει η παραγωγή. Πέρα ενός σημείου (x_i^0) η παραγωγή συνεχίζει να αυξάνει αλλά με φθίνων ρυθμό (δηλαδή η δεύτερη παράγωγος ως προς x_i είναι αρνητική). Αυτό το φαινόμενο λέγεται και «Νόμος της φθίνουσας παραγωγικότητας».

5.10.2 ΟΡΙΑΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Σαν οριακή χρησιμότητα του i προϊόντος ονομάζουμε τη μερική παράγωγο δηλαδή $\partial U/\partial q_i$.

5.10.3 ΜΕΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $y=f(x_1,x_2,\ldots, x_k)$ τότε η μερική ελαστικότητα ως προς x_i ονομάζεται η ποσότητα

$$E_{y,xi}=\frac{x_i}{y}\frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{x_i}{f(x_1,\ldots,x_k)}\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_k)}{\partial x_i}.$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ: Η μερική ελαστικότητα δίνει την ποσοστιαία μεταβολή της y αν η x_i αυξηθεί κατά 1% και όλες οι υπόλοιπες εξαρτημένες μεταβλητές μείνουν σταθερές.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $E_{y,xi}$ ή Ey/Ex_i ή Ef/Ex_i.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $Ey/Ex_i = \partial \ln f(x)/ \partial \ln x$.

5.11 ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξεως της συνάρτησης f(x,y) ονομάζονται οι συναρτήσεις που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε τις μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ και δίδονται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(I) Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό σε μερική παράγωγος n-τάξης και τη συμβολίζουμε ως $\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ για k=0, …, n.

(II) Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τη μερική παράγωγο n-τάξης για συνάρτηση p μεταβλητών και τη συμβολίζουμε ως $\frac{\partial^n f(x_1,\ldots,x_p)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_p^{k_p}}$ με $k_1+\ldots+k_p=n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν οι μερικές παράγωγοι της *f*(x,y), ∂*f*/∂x και ∂*f*/∂y είναι συνεχείς σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού (x_0,y_0) τότε $\frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Διάνυσμα κλίσης* της συνάρτησης $f(x_1,x_2,\ldots, x_p)$ στο σημείο $\underline{x}^0=(x_1^0, x_2^0,\ldots, x_p^0)$ ονομάζουμε το διάνυσμα με στοιχεία τις πρώτες μερικές παραγώγους στο σημείο αυτό.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\nabla f(\underline{x}^0)=\begin{pmatrix}\partial f(\underline{x}^0)/\partial x_1\\ \vdots\\ \partial f(\underline{x}^0)/\partial x_p\end{pmatrix}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Εσσιανή Μήτρα (Hessian Matrix)* ονομάζεται ο πίνακας H(f) με στοιχεία $H_{ij}=\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$ που αντιστοιχούν στην i γραμμή και j στήλη και δίδεται ως εξής:

$$H(f)=\begin{bmatrix}\partial^2 f\big/\partial x_1^2 & \partial^2 f\big/\partial x_1\partial x_2 & \ldots & \partial^2 f\big/\partial x_1\partial x_p\\ \partial^2 f\big/\partial x_2\partial x_1 & \partial^2 f\big/\partial x_2^2 & \ldots & \partial^2 f\big/\partial x_2\partial x_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial^2 f\big/\partial x_p\partial x_1 & \partial^2 f\big/\partial x_p\partial x_2 & \ldots & \partial^2 f\big/\partial x_p^2\end{bmatrix}.$$

5.12 ΑΚΡΙΒΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το άθροισμα u(x,y)dx+υ(x,y)dy ονομάζεται *ακριβές διαφορικό* αν και μόνο αν ∂u/∂y=∂υ/∂x.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε εξίσωση της μορφής u(x,y)dx+υ(x,y)dy=0 ονομάζεται *διαφορική εξίσωση*.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αρκεί να βρούμε μια εξίσωση f(x,y) τέτοια ώστε df= u(x,y)dx+υ(x,y)dy όποτε η εξίσωση f(x,y)=0 δίνει τη ζητούμενη συνάρτηση σε πεπλεγμένη μορφή.

5.13 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω η συνάρτηση f(x,y). Το σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ ονομάζεται στάσιμο αν $\partial f(x_0,y_0)/\partial x=\partial f(x_0,y_0)/\partial y=0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν μια συνάρτηση f(x,y) είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ το οποίο είναι τοπικό ακρότατο τότε αυτό το σημείο είναι στάσιμο.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν ένα σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ είναι στάσιμο και

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$$

τότε

(I) Αν $\Delta>0$ και $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial y^2<0$, $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial x^2<0$ τότε η παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο (x_0,y_0).

(II) Αν $\Delta>0$ και $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial y^2>0$, $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial x^2>0$ τότε η παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (x_0,y_0).

(III) Αν $\Delta<0$ τότε το σημείο (x_0,y_0) ονομάζεται σαγματικό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(I) Αν $\Delta=0$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τη φύση του σημείου (μπορεί να είναι ακρότατο ή σαγματικό σημείο).

(I) Αν το σημείο (x_0,y_0) δεν είναι εσωτερικό τότε μπορεί έχουμε ακρότατο με $\Delta<0$.

5.14 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

[ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ LANGRANGE]

Πολλές φορές στόχος είναι να βρούμε το μέγιστο μιας συνάρτησης υπό κάποιο περιορισμό.

Για παράδειγμα ο καταναλωτής θέλει να μεγιστοποίησει τη χρησιμότητα του υπό τον περιορισμό να υπάρχει κάποιο όριο στις αγορές (που καθορίζεται από το εισόδημα).

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν η συνάρτηση f(x,y) παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ακρότατο στο σημείο (x_0,y_0) υπό τον περιορισμό φ(x,y)=0 τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\phi(x_0,y_0)}{\partial x}=0$$

και

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\phi(x_0,y_0)}{\partial y}=0\,.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν F(x,y,λ)=f(x,y)+λφ(x,y), τότε τα δεσμευμένα τοπικά ακρότατα θα πρέπει να αναζητηθούν στις λύσεις του συστήματος:

$$\partial F(x,y,\lambda)/\partial x=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}=0$$

$$\partial F(x,y,\lambda)/\partial y=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=0$$

$$\partial F(x,y,\lambda)/\partial\lambda=\varphi(x,y)=0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν F(x,y,λ)=f(x,y)+λφ(x,y) και το σημείο (x_0,y_0,λ_0) είναι λύση του συστήματος ∂F(x,y,λ)/∂x=0, ∂F(x,y,λ)/∂y=0 και φ(x,y)=0 και

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial\phi(x_0,y_0)}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial\phi(x_0,y_0)}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial\phi(x_0,y_0)}{\partial y} & 0\end{vmatrix}=$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

(I) Αν $\Delta_1>0$ τότε η f(x,y) παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό μέγιστο.

(II) Αν $\Delta_1<0$ τότε η f(x,y) παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ελάχιστο.