

### 3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

#### 3.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω δύο σύνολα  $A \neq \emptyset$  και  $B \neq \emptyset$ .

*ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ* του συνόλου  $A$  στο  $B$  είναι η διμελής σχέση  $f \subseteq A \times B$  για την οποία  $\forall x \in A$  αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα  $y \in B$  δηλαδή

$$\boxed{\forall x \in A \exists y \in B : f(x) = \{y\}}$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Κάθε απεικόνιση  $f: A \rightarrow B$  ονομάζεται και *ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ* με πεδίο ορισμού  $D(f) = A$  και πεδίο τιμών  $R(f) \subseteq B$ .

$$R(f) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ με } f(x)=y\}$$

#### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- $x \in A$  : ανεξάρτητη μεταβλητή
- $y \in B$  : εξαρτημένη μεταβλητή
- Αν  $A, B \subseteq \mathbf{R}$  τότε η  $f$  ονομάζεται πραγματική συνάρτηση.

### 3.2 ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

#### 3.2.1 ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f: A \rightarrow \mathbf{R} \text{ με } f(x) = x$$

#### 3.2.2 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f: A \rightarrow \mathbf{R} \text{ με } f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

#### 3.2.3 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:**  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *συμμετρική ως προς το  $a$*  (ή την ευθεία  $y=a$ ) αν ισχύουν:

- (i)  $\forall a-x \in A \Leftrightarrow a+x \in A$  και
- (ii)  $f(a-x) = f(a+x)$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:**  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *συμμετρική ως προς το σημείο  $\theta$   $a$*  (ή την ευθεία  $y=0$ ) ή *ΑΡΤΙΑ* αν:

- (i)  $\forall -x \in A \Leftrightarrow x \in A$  και
- (ii)  $f(-x) = f(x)$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:**  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *ΠΕΡΙΤΤΗ* αν:

- (i)  $\forall -x \in A \Leftrightarrow x \in A$  και
- (ii)  $f(-x) = -f(x)$

### 3.2.4 ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ (1-1)

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *αμφιμονοσήμαντη* ή *ένα προς ένα (1-1)* αν και μόνο αν

$$\forall y \in R(f) \exists \text{ ένα και μόνο ένα } x \in A : f(x) = y$$

### 3.2.5 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται:

(α) *αύξουσα* αν  $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(β) *γνησίως αύξουσα* αν  $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(γ) *φθίνουσα* αν  $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

(δ) *γνησίως φθίνουσα* αν  $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις λέγονται *μονότονες*.

### 3.2.6 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** *Αντίστροφη συνάρτηση* μίας αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης  $f$  ορίζουμε τη συνάρτηση  $f^{-1}: R(f) \rightarrow D(f)$  για την οποία

$$f^{-1}(y) = x \quad \forall x \in D(f) \text{ και } y \in R(f) : f(x) = y$$

### 3.2.7 ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Σύνθεση δύο πραγματικών συναρτήσεων  $f$  και  $g$  με  $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$  ορίζουμε τη συνάρτηση  $g \circ f(x) = g(f(x))$  με πεδίο ορισμού

$$D(g \circ f) = \{ x \in D(f) : f(x) \in D(g) \}.$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Αν  $R(f) \subseteq D(g)$  τότε  $D(g \circ f) = D(f)$

### 3.2.8 ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *άνω φραγμένη* αν  $\exists M \in \mathbf{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in D(f)$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *κάτω φραγμένη* αν  $\exists M \in \mathbf{R} : f(x) \geq M \quad \forall x \in D(f)$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *φραγμένη* αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη

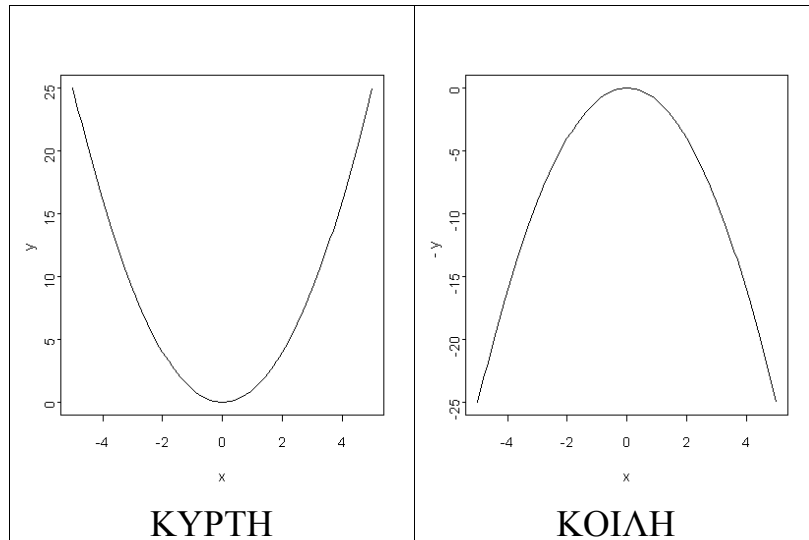
### 3.2.9 ΚΥΡΤΕΣ & ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *κυρτή* σε ένα διάστημα  $\Delta \subseteq D(f)$  αν

$$\forall x_1, x_2 \in \Delta, t \in (0, 1) \Rightarrow f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  ονομάζεται *κοίλη* σε ένα διάστημα  $\Delta \subseteq D(f)$  αν

$$\forall x_1, x_2 \in \Delta, t \in (0, 1) \Rightarrow f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$



### 3.3 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

#### 3.3.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Όριο της  $f(x)$  στην τιμή  $a$

Ο αριθμός  $L$  είναι το όριο μιας συνάρτησης  $f(x)$  όταν το  $x$  προσεγγίζει το  $a$  αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall |x - a| < \delta$$

$$[L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \forall a - \delta < x < a + \delta]$$

Με άλλα λόγια: Για οποιοδήποτε θετική ποσότητα  $\varepsilon$  μπορούμε να βρούμε μια περιοχή (διάστημα) κοντά στο  $a$  για το οποίο το  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πλευρικά Όρια

Ο αριθμός  $L$  είναι το όριο από δεξιά (αριστερά) μιας συνάρτησης  $f(x)$  όταν το  $x$  προσεγγίζει το  $a$  αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall a < x < a + \delta \quad (a - \delta < x < a)$$

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  (Αριστερό)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (\text{Δεξί})$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Όρια στο Άπειρο

Ο αριθμός  $L$  είναι το όριο μιας συνάρτησης  $f(x)$  όταν το  $x$  προσεγγίζει το  $+\infty$  ( $-\infty$ ) αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x > \delta \quad (x < -\delta)$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:**

Ο αριθμός  $L$  είναι το όριο μιας συνάρτησης  $f(x)$  όταν το  $x$  προσεγγίζει το  $a$  αν και μόνο αν

$$\forall \Pi(L) \exists \Pi(a): f(x) \in \Pi(L) \quad \forall x \in \Pi(a)$$

$\Pi(L)$ : Περιοχή γύρω από το  $L$  και  $\Pi(a)$ : Περιοχή γύρω από το  $a$ .

**3.3.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ**

Έστω  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$

$$1 \dots \lim_{x \rightarrow a} (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lambda_2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$$

$$2 \dots \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 L_2$$

$$3 \dots \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = L_1 / L_2$$

$$4 \dots \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L_1^n$$

$$5 \dots \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |L_1|$$

$$6 \dots \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = g(L_1) \text{ αν και μόνο αν } L_1 \in D(g)$$

$$7 \dots \text{ Αν } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Οι ιδιότητες 1&2 μπορούν να γενικευτούν για  $n$  συναρτήσεις:

$$8 \dots \lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$$

$$9 \dots \lim_{x \rightarrow a} \left( \prod_{i=1}^n f_i(x) \right) = \prod_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \prod_{i=1}^n L_i$$

### 3.3.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ ΠΟΥ ΤΕΙΝΟΥΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

$$1... \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$$

$$= +\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \in \mathbf{R}$$

$$= -\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \in \mathbf{R}$$

$$= +\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

$$= -\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$$

$$= \text{απροσδιόριστο \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$$

$$2... \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) =$$

$$= +\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L > 0$$

$$= +\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L < 0$$

$$= -\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L > 0$$

$$= -\infty \text{ \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L < 0$$

$$= \text{απροσδιόριστο \acute{o}ταν } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$3... \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g(x)} \right)$$

όπως στο γινόμενο.

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Αν  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$  ή  $0^-$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g(x)} \right) = \pm\infty$$

**ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

τότε  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \text{απροσδιόριστο.}$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

Αν  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις

και  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  τότε  $(x-a)$  είναι

παράγοντας και των δύο συναρτήσεων οπότε

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{(x-a)f_0(x)}{(x-a)g_0(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f_0(x)}{g_0(x)} \right).$$

### 3.3.4 ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

$$1... \lim_{x \rightarrow a} (\sin(x)) = \sin(a) \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\cos(x)) = \cos(a) \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (tg(x)) = tg(a) \quad \forall a \in \mathbf{R} \setminus \{ \kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbf{Z} \}$$

$$2... \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$$

$$3... \lim_{x \rightarrow 1} X^k = 1$$

$$4... \lim_{x \rightarrow a} b^x = b^a$$

$$5... \lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = +\infty, \quad b > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0, \quad b > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0, \quad 0 < b < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = +\infty, \quad 0 < b < 1$$

$$6... \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$7... \lim_{x \rightarrow a} (\ln(x)) = \ln(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x)) = -\infty$$

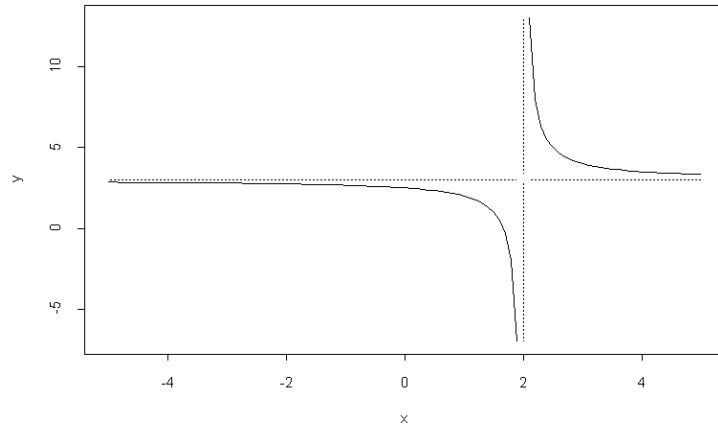
$$8... \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\ln(x)}{x-1} \right) = 1$$

### 3.3.5 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

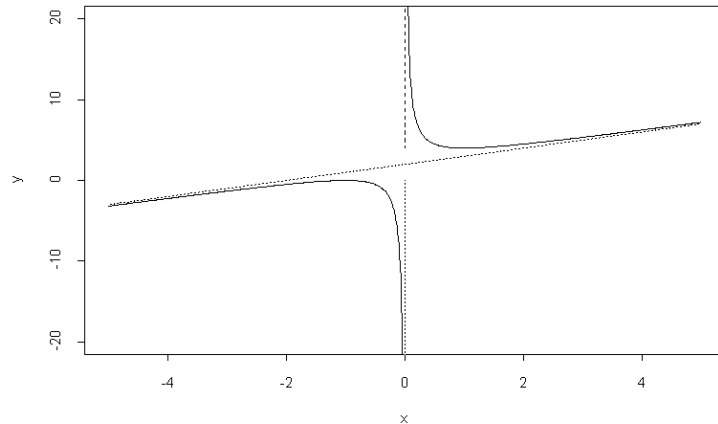
**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η ευθεία  $D: y = ax + \beta$  είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης  $f(x)$  αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \beta$  ή  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \beta$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η ευθεία  $D: x = \gamma$  είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης  $f(x)$  αν  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:**  $f(x)=3+1/(x-2)$



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:**  $f(x)=x+2+1/x$



### 3.4 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

#### 3.4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής στο σημείο  $a \in D(f)$  αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα  $A \subseteq D(f)$  αν και μόνο αν η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $x_0 \in A$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια μόνο τότε έχουμε συνέχεια από δεξιά ή αριστερά.

#### 3.4.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1... Έστω  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  και  $f(x), g(x)$  συνεχείς συναρτήσεις. Τότε και οι συναρτήσεις:

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x), f(x)g(x) \text{ και } f(x)/g(x)$$

είναι συνεχείς.

2... Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  τότε η συνάρτηση αυτή παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$ , δηλαδή

$$\forall M \in (\min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \max\{f(\alpha), f(\beta)\})$$

$$\exists \gamma \in (\alpha, \beta): f(\gamma) = M$$

ή

$$(\min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \max\{f(\alpha), f(\beta)\}) \subseteq R(f)$$

**ΠΟΡΙΣΜΑ:** Αν  $f(x)$  είναι συνεχής και μονότονη στο  $D(f)=[\alpha, \beta]$  τότε

$$R(f) = [\min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \max\{f(\alpha), f(\beta)\}]$$

**ΠΟΡΙΣΜΑ:** Αν  $f(x)$  είναι ορισμένη και συνεχής στο  $D(f)=[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha)f(\beta) < 0$  τότε  $\exists \gamma \in (\alpha, \beta): f(\gamma) = 0$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν  $f(x)$  είναι ορισμένη και συνεχής στο  $D(f)=[\alpha, \beta]$  τότε είναι και φραγμένη.

### 3.5 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (I)

#### 3.5.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

##### ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

- **p:** τιμή ενός προϊόντος ή αγαθού (price)
- **q:** ποσότητα ενός αγαθού (quantity)
- **d:** ζήτηση ενός αγαθού (demand)
- **s:** προσφορά ενός αγαθού (supply)
- **R:** ολικά έσοδα μίας επιχείρησης
- **C:** ολικό κόστος μίας επιχείρησης (cost)

##### ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- **d=d(p):** συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού
- **s=s(p):** συνάρτηση προσφοράς ενός αγαθού
- **R=R(q):** συνάρτηση ολικών εσόδων
- **C=C(q):** συνάρτηση ολικού κόστους

##### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

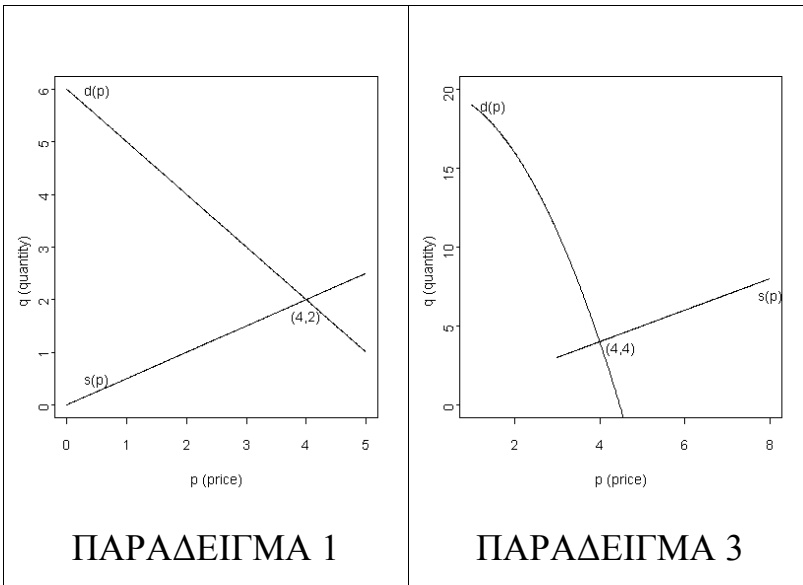
- Το πεδίο ορισμού συνήθως είναι  $[0, +\infty)$
- Η συνάρτηση ζήτησης  $[d(p)]$  είναι φθίνουσα
- Η συνάρτηση προσφοράς  $[s(p)]$  είναι αύξουσα



### 3.5.2 ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Τιμή ισορροπίας ενός αγαθού είναι η τιμή  $p_0 \in D(d) \cap D(s)$  για την οποία  $d(p_0) = s(p_0) = q_0$ . Η ποσότητα  $q_0$  λέγεται ποσότητα ισορροπίας και το σημείο  $(p_0, q_0)$  σημείο ισορροπίας.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Το σημείο ισορροπίας ορίζεται στο σημείο που τέμνονται η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση προσφοράς.



### 3.5.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η συνάρτηση ολικών εσόδων ονομάζεται το συνολικό ποσό που αποκτάται από την πώληση  $q$  μονάδων ενός αγαθού και ορίζεται ως  $R(q) = \text{ποσότητα} \times \text{τιμή} = p q$ .

Συνήθως η τιμή καθορίζεται από την ποσότητα είναι δηλαδή συνάρτηση της ποσότητας και έτσι έχουμε  $p = p(q)$  και  $R(q) = p(q) q$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η συνάρτηση μέσων εσόδων ορίζεται ως  $AR(q) = R(q)/q$ .

[είναι το έσοδο που έχουμε από κάθε μονάδα του αγαθού που πουλήσαμε ]

### 3.5.4 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΟΣΤΟΥΣ Ή ΕΞΟΔΩΝ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η συνάρτηση ολικού κόστους  $C(q)$  ονομάζεται η συνολική δαπάνη που απαιτείται για την παραγωγή  $q$  μονάδων ενός αγαθού.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**  $C(q)$  είναι αύξουσα.

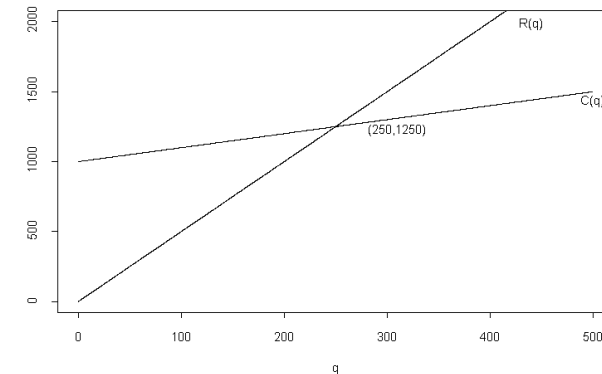
Η ποσότητα  $C_0=C(0)$  ονομάζεται σταθερό ή πάγιο κόστος.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η συνάρτηση μέσου κόστους  $AC(q)$  ονομάζεται η δαπάνη που αντιστοιχεί κατά μέσο όρο για την παραγωγή κάθε μονάδας ενός αγαθού και ορίζεται ως  $AC(q)=C(q)/q$ .

### 3.5.5 ΝΕΚΡΟ ΣΗΜΕΙΟ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Νεκρό σημείο ονομάζουμε το σημείο  $(q_0, C(q_0))$  με  $q_0 \in D(C) \cap D(R)$  στο οποίο τα έσοδα και το κόστος είναι ίσα δηλαδή  $C(q_0) = R(q_0)$ .

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Στο νεκρό σημείο δεν έχουμε ούτε κέρδος ούτε ζημιά.



## 3.6 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### 3.6.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Παράγωγος μίας συνάρτησης  $f(x)$  στο σημείο  $x_0 \in D(f)$  ονομάζεται το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbf{R}.$$

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:**  $f'(x)$  ή  $\frac{df(x)}{dx}$ .

**ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ:** αν  $\delta x = x - x_0$  τότε

$$f'(x_0) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$$

### ΕΡΜΗΝΕΙΑ

- $f(x_0 + \delta x) - f(x_0)$ : Μεταβολή της  $f$  όταν το  $x_0$  αυξάνει κατά  $\delta x$ .
- $\frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$ : Μέση μεταβολή της  $f$  όταν το  $x_0$  αυξάνει κατά  $\delta x$ .
- $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$ : Μέση μεταβολή της  $f$  όταν το  $x_0$  αυξάνει απειροελάχιστα.

$f'(x)$  ονομάζεται και οριακός ή στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Παράγωγος συνάρτηση  $f'(x)$  μίας συνάρτησης  $f(x)$  ονομάζεται η συνάρτηση

$$f'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \quad \forall x \in D(f')$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I):** Η παράγωγος  $f'(x)$  μας δίνει την κλίση της εφαπτομένη στο σημείο  $(x, f(x))$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II):** Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι και συνεχής.

### 3.6.2 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (II)

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Συνάρτηση Οριακών εσόδων  $MR(q)$  ονομάζουμε την παράγωγο της συνάρτησης ολικών εσόδων  $R(q)$  δηλαδή

$$MR(q) = R'(q) = \frac{dR(q)}{dq}.$$

**ΕΡΜΗΝΕΙΑ:** οριακός ρυθμός μεταβολής των εσόδων.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Συνάρτηση Οριακού κόστους  $MC(q)$  ονομάζουμε την παράγωγο της συνάρτησης ολικού κόστους  $C(q)$  δηλαδή

$$MC(q) = C'(q) = \frac{dC(q)}{dq}.$$

**ΕΡΜΗΝΕΙΑ:** οριακός ρυθμός μεταβολής του κόστους.

### 3.6.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

$$1... f(x)=c \quad \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f'(x)=0$$

$$2... f(x)=\alpha x+\beta \Leftrightarrow f'(x)=\alpha$$

$$3... f(x)=x^k \Leftrightarrow f'(x)=kx^{k-1}$$

$$4... f(x)=e^x \Leftrightarrow f'(x)=e^x$$

$$5... f(x)=\sin(x) \Leftrightarrow f'(x)=\cos(x)$$

### 3.6.4 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

$$1... [\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)]' = \lambda_1 f'(x)+\lambda_2 g'(x)$$

$$2... [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$3... \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$4... \left( \frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \quad [\text{Από (3) για } f(x)=1]$$

$$5... [g \circ f(x)]' = g'(f(x)) f'(x)$$

$$6... [f^{-1}(x)]' = 1/f'(f^{-1}(x))$$

### 3.7 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Εάν  $f'(x)$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  τότε η παράγωγος της λέγεται παράγωγος δευτέρας τάξης.

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:**  $f''(x)$  ή  $f^{(2)}(x)$  ή  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και της παραγώγους  $3^{\text{ης}}, 4^{\text{ης}}, \dots, n$  τάξης.

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:**  $f^{(n)}(x)$  ή  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ .

#### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$$1... [\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)]^{(n)} = \lambda_1 f^{(n)}(x)+\lambda_2 g^{(n)}(x)$$

$$2... [f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

$$\text{όπου } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 3.8 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΟΡΙΩΝ ΚΑΙ Ο ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOPITAL

**ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOPITAL:** Έστω  $f(x)$  και  $g(x)$  συνεχείς στο διάστημα  $[a, \beta]$  και παραγωγίσιμες στο  $(a, \beta)$  και  $x_0 \in [a, \beta]$ : αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  ή

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$  και υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I):** Ο κανόνας ισχύει και για

$x \rightarrow \pm\infty$  δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II):** Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή του  $\lim\{f(x) + g(x)\}$ , δηλαδή  $\lim f(x) = +\infty$  και  $\lim g(x) = -\infty$  τότε μετασχηματίζουμε το παραπάνω όριο σε μορφή  $0/0$  θέτοντας  $F(x) = 1/f(x)$  και  $G(x) = 1/g(x)$  έτσι ώστε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hopital. Δηλαδή

$$\lim\{f(x) + g(x)\} = \lim \frac{F(x) + G(x)}{F(x)G(x)}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (III):** Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή του  $\lim\{f(x)g(x)\}$ , δηλαδή  $\lim f(x) = 0$  και  $\lim g(x) = \pm\infty$  τότε μετασχηματίζουμε το παραπάνω όριο σε μορφή  $\infty/\infty$  θέτοντας  $F(x) = 1/f(x)$  έτσι ώστε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hopital.

Δηλαδή  $\lim\{f(x) + g(x)\} = \lim \frac{g(x)}{F(x)}$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (IV):** Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή του  $\lim f(x)^{g(x)}$ , δηλαδή  $\lim f(x) = a$  και  $\lim g(x) = \beta$  με

(i)  $a = \beta = 0$

(ii)  $a = 1$  και  $\beta = \pm\infty$

(iii)  $a = 0$  και  $\beta = \pm\infty$

(iv)  $a = \pm\infty$  και  $\beta = 0$

τότε μετασχηματίζουμε το παραπάνω όριο σε

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim\{g(x) \ln f(x)\}}$$

έτσι ώστε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hopital.

### 3.9 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Διαφορικό μιας συνάρτησης  $f(x)$  και για απόκλιση από το  $x$  ίση με  $dx$  ορίζεται η συνάρτηση  $df(x) = f'(x)dx$ .

**ΕΡΜΗΝΕΙΑ:** Το διαφορικό εκφράζει μια προσέγγιση της μεταβολής της  $f$  όταν το  $x$  αυξηθεί κατά  $dx$  (δηλαδή γίνει  $x+dx$ ). Η προσέγγιση βασίζεται στην εφαπτομένη στο σημείο  $(x, f(x))$ .

Όσο πιο μικρό είναι το  $dx$  τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση.

Στην πράξη αν ζητηθεί το διαφορικό της  $f(x)$  υπολογίζουμε την παράγωγο της.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**  $df(x)=f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x)=df(x)/dx$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f(x)$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  δίδεται ως εξής:

$$L(x): y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Διαφορικό  $n$  τάξης μιας συνάρτησης  $f(x)$  και για απόκλιση από το  $x$  ίση με  $dx$  ορίζεται η συνάρτηση  $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$ .

### 3.10 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (III)

#### 3.10.1 ΟΡΙΑΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Οριακή συνάρτηση ενός οικονομικού μεγέθους ή συνάρτησης (ζήτησης, προσφοράς, εσόδων, κέρδους κλπ.) ονομάζεται η πρώτη τους παράγωγος.

**ΕΡΜΗΝΕΙΑ:** Τα οριακά μεγέθη χρησιμοποιούνται ως προσέγγιση της μεταβολής της  $f(x)$  όταν το  $x$  μεταβάλλεται κατά μία μονάδα.

#### 3.10.2 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Τα οριακά μεγέθη επηρεάζονται από τις μονάδες μέτρησης τους. Για αυτό ορίζουμε εναλλακτικά την ελαστικότητα.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Ελαστικότητα μιας συνάρτησης  $y=f(x)$  ονομάζεται η συνάρτηση:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{dx} \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

**ΕΡΜΗΝΕΙΑ:** Είναι ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της  $y=f(x)$  [ $dy/y$ ] προς την ποσοστιαία μεταβολής της  $x$  [ $dx/x$ ].

**ΕΡΜΗΝΕΙΑ (II):** Εάν η  $x$  αυξηθεί κατά 1% τότε η  $y=f(x)$  αυξάνει κατά  $E(x)$ .

$$\text{ΕΡΜΗΝΕΙΑ (III): } E(x) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{f(x)}{x} =$$

[Συν. οριακού μεγέθους]/[Συν. μέσου μεγέθους]

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Η  $E(x)$  είναι ελεύθερη μονάδων.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II):** Η  $E(x) = d\ln(y)/d\ln(x)$ .

### 3.11 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

**ΘΕΩΡΗΜΑ του Rolle:** Αν  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  και  $f(a) = f(\beta)$  τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  τότε υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

[Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού].

### 3.12 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$ . Αν  $f(x)$  είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα  $(a, \beta)$  τότε  $f'(x) \geq 0$  ή  $f'(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Για τις γνησίως αύξουσες ή φθίνουσες στο διάστημα  $(a, \beta)$  τότε  $f'(x) > 0$  ή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

### 3.13 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μια συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο για  $x = x_0 \in D(f)$  αν μπορούμε να ορίσουμε μια περιοχή  $\Pi(x_0)$  γύρω από το  $x_0$  τέτοια ώστε:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ ή } f(x_0) \geq f(x) \text{ για κάθε } x \in \Pi(x_0)$$

**Συνήθως**  $\Pi(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$  για  $\varepsilon > 0$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μια συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ή μέγιστο για  $x=x_0 \in D(f)$  αν:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ ή } f(x_0) \geq f(x) \text{ για κάθε } x \in D(f)$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat):** Έστω  $f(x)$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in D(f)$  και η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο για  $x=x_0$  τότε  $f'(x)=0$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω  $f(x)$  παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ :

(α) αν  $f'(x) < 0$  για  $x < x_0$  και  $f'(x) > 0$  για  $x > x_0$  τότε η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για  $x=x_0$ .

(β) αν  $f'(x) > 0$  για  $x < x_0$  και  $f'(x) < 0$  για  $x > x_0$  τότε η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για  $x=x_0$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω  $f(x)$  δύο φορές παραγωγίσιμη  $f'(x_0)=0$  και  $f''(x_0) \neq 0$  τότε

(α) αν  $f''(x_0) < 0$  τότε τοπικό μέγιστο στο  $x=x_0$ .

(β) αν  $f''(x_0) > 0$  τότε τοπικό ελάχιστο στο  $x=x_0$ .

### 3.14 ΚΥΡΤΕΣ & ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω  $f(x)$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  τότε  $f(x)$  είναι κυρτή (ή κοίλη) στο  $[\alpha, \beta]$  αν  $f''(x) \geq 0$  ( ή  $f''(x) \leq 0$  ) για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Το σημείο  $(x_0, f(x_0))$  λέγεται σημείο καμπής μιας συνεχούς στο  $[\alpha, \beta]$  συνάρτησης  $f(x)$  αν υπάρχει  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε η  $f(x)$  είναι κυρτή στο  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$  και κοίλη  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  ή αντίστροφα. [δηλαδή είναι το σημείο που αλλάζει η κυρτότητα].

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν  $f(x)$  δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0 \in D(f)$  το οποίο είναι θέση σημείου καμπής τότε  $f''(x_0) = 0$

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω  $f(x)$  τρεις φορές παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 \in D(f)$ . Το  $x_0$  είναι θέση σημείου καμπής αν  $f''(x_0) = 0$  και  $f'''(x_0) \neq 0$ .