ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΙΑΤΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΠΣ ΒΙΟΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

ΛΥΚΟΥ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

ΒΑΣΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΚΑΤΑ BAYES

ΑΘΗΝΑ, 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: *Εισαγωγή Στη Στατιστική Θεωρία Του Bayes* 1

1.1 Ιστορική αναδρομή 1
1.2 Συμπερασματολογία κατά Bayes 2
Παράδειγμα 1.1 3
Εφαρμογή 1.1 4
1.3 Εκ των προτέρων κατανομή 5
1.3.1 Συζυγείς εκ των προτέρων κατανομές 6
Παράδειγμα 1.2 8
Εφαρμογή 1.2 9
1.3.2 Ακατάλληλες εκ των προτέρων κατανομές 9
Παράδειγμα 1.3 11
Παράδειγμα 1.4 12
1.3.3 Κατασκευή της εκ των προτέρων κατανομής με τη χρήση Πλασματικών δεδομένων 12
1.4 Πολυπαραμετρικά προβλήματα 14
Παράδειγμα 1.5 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: *Έλεγχος Υποθέσεων* 17

2.1 Εκ των Υστέρων Λόγος Πιθανοτήτων και ο Παράγοντας Bayes 17
2.2 Επιλογή μοντέλου 19
2.2.1 Σύγκριση μοντέλων 20
Κριτήρια Επιλογής Μοντέλων 20
Monte Carlo εκτίμηση του Παράγοντα Bayes 21
Επιλογή με Θεώρημα Απόρριψης 22
2.2.2 Μπεϋζιανή Στάθμιση μοντέλων 23
2.2.3 Το παράδοξο του Lindley 25
2.2.4 Παραλλαγές του παράγοντα Bayes 25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: *Έλεγχοι Υποθέσεων ενός Πληθυσμού* 27

3.1 Έλεγχος υποθέσεων για το μέσο ενός πληθυσμού 27
3.1.1 Πληθυσμός κανονικής κατανομής με σ^2 γνωστό 27
Παράδειγμα 3.1 : Προσομοιωμένα δεδομένα (1) 30
Παράδειγμα 3.2 : Προσομοιωμένα δεδομένα (2) 33
3.1.2 Πληθυσμός κανονικής κατανομής με σ^2 άγνωστο 37
Παράδειγμα 3.3 : Δεδομένα λευχαιμίας 40

Παράδειγμα 3.4 : Ταχύτητα φωτός 44
Παράδειγμα 3.5 : Μετρήσεις γλυκόζης..... 50
3.2 Έλεγχοι υποθέσεων για δύο συσχετιζόμενους πληθυσμούς..... 54
3.2.1 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο εξαρτημένων δειγμάτων κανονικής κατανομής με γνωστές διασπορές. 54
3.2.2 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο εξαρτημένων δειγμάτων κανονικής κατανομής με άγνωστες διασπορές. 56
Παράδειγμα 3.6 : Αποτελεσματικότητα δυο ειδών ασπιρίνης..... 59
Παράδειγμα 3.7 : Νάτριο και πίεση αίματος..... 63
Παράδειγμα 3.8 : Συμφωνία γιατρών..... 67
3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων στατιστικών τεστ και Μπεϋζιανών 71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: *Έλεγχοι Υποθέσεων δύο Πληθυσμών*..... 73

4.1 Έλεγχοι υποθέσεων για δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς..... 73
4.1.1 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας διασπορών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής 73
Παράδειγμα 4.1 : Προσομοιωμένα δεδομένα (3) 76
4.1.2 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με ίσες γνωστές διασπορές. 82
Παράδειγμα 4.2 : Προσομοιωμένα δεδομένα (4) 84
Παράδειγμα 4.3 : Προσομοιωμένα δεδομένα (5) 89
Παράδειγμα 4.4 : Προσομοιωμένα δεδομένα (6) 93
4.1.3 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με ίσες άγνωστες διασπορές. 99
Παράδειγμα 4.5 : Πρόωρος τοκετός 102
Παράδειγμα 4.6 : Σύγκριση βάρους ποντικών..... 108
Παράδειγμα 4.7 : Δείκτης πνευμονικής λειτουργίας (FEV)..... 114
4.1.4 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με άνισες γνωστές διασπορές. 121
Παράδειγμα 4.8 : Προσομοιωμένα δεδομένα (7) 123
Παράδειγμα 4.9 : Προσομοιωμένα δεδομένα (8) 127
Παράδειγμα 4.10 : Προσομοιωμένα δεδομένα (9) 132
4.1.5 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με άνισες άγνωστες διασπορές. 136
4.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων τεστ σημαντικότητας και Μπεϋζιανών 136

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: *Συζήτηση και Περαιτέρω Έρευνα* 139

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 141

Παράρτημα Α: Εκ των προτέρων κατανομές δύναμης για Ελέγχους Υποθέσεων. *143*
Παράρτημα Β: Συναρτήσεις στο S-PLUS..... 149
Βιβλιογραφία 173

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Ιωάννη Ντζούφρα και Πέτρο Δελλαπόρτα για τη διδασκαλία του μαθήματος Μπεϋζιανή Συμπερασματολογία κατά το πρώτο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών, όπου υπήρξε η πρώτη μου επαφή με τις Μπεϋζιανές μεθόδους και αποτέλεσε το έναυσμα και το κίνητρο αυτής της εργασίας. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμον στον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της διπλωματικής εργασίας, Ι. Ντζούφρα για την σταθερή και δημιουργική του υποστήριξη καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Χάρις στην αμέριστη συμπαράσταση και υπομονή του ξεπεράστηκαν όλες οι τεχνικές αλλά και επιστημονικές δυσκολίες που παρουσιάστηκαν μέχρι και τις τελευταίες σελίδες αυτής της εργασίας. Το πλούσιο γνωστικό του επίπεδο και η ουσιαστική του βοήθεια με διορθώσεις και συμβουλές σε όλες τις φάσεις προετοιμασίας και συγγραφής αυτής της εργασίας συνέβαλαν στην καλύτερη διαμόρφωση του τελικού αποτελέσματος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω αλλά και να αφιερώσω αυτή την προσπάθεια στους γονείς μου για τη ψυχολογική αλλά και οικονομική τους υποστήριξη σε όλη τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στη Βίκυ, την Έλενα, τη Σίλια και το Γιώργο.

Περίληψη

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Press (1989) η Μπεϋζιανή συμπερασματολογία είναι μια μεθοδολογική προσέγγιση η οποία συνθέτει τη θεωρητική ή εμπειρική αντίληψη μιας τυχαίας δοκιμασίας, με τα παρατηρηθέντα δεδομένα. Δηλαδή, είναι η διαδικασία κατά την οποία βελτιώνεται η εκ των προτέρων γνώση που έχουμε για μια παράμετρο, μέσω της πιθανοφάνειας στην εκ των υστέρων γνώση που θα έχουμε για αυτή. Τα τελευταία χρόνια, όλο μεγαλύτερες είναι οι αναφορές της βιβλιογραφία στη χρήση των Μπεϋζιανών προσεγγίσεων για την επιλογή του κατάλληλου μοντέλου δεδομένου ότι έχουν ξεπεραστεί παλαιότερες δυσκολίες και ότι είναι γνωστά τα μειονεκτήματα της κλασικής στατιστικής στον τομέα αυτό.

Στην ερευνητική εργασία που εκτίθεται γίνεται λεπτομερής ανασκόπηση των Μπεϋζιανών προσεγγίσεων για τον έλεγχο βασικών υποθέσεων. Συγκεκριμένα, οι υποθέσεις που ελέγχθηκαν είναι εκείνες της ισότητας του μέσου κανονικού πληθυσμού με μια συγκεκριμένη τιμή, της ισότητας των μέσων δύο κανονικών πληθυσμών με ίσες ή άνισες διασπορές καθώς και ο έλεγχος της ισότητας των διασπορών. Επίσης, έγινε διαχωρισμός στις περιπτώσεις όπου οι πληθυσμοί είναι εξαρτημένοι ή ανεξάρτητοι. Για κάθε έλεγχο υποθέσεων υπολογίστηκε η ποσότητα που χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των μοντέλων, ο παράγοντας Bayes (Bayes Factor), η εκ των υστέρων κατανομή κάθε άγνωστης παραμέτρου (Posterior Distribution), η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης (Posterior Probability) καθώς και τα διαστήματα αξιοπιστίας για κάθε υπό εκτίμηση παράμετρο. Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί ρουτίνες στο στατιστικό πακέτο S-PLUS όπου υπολογίζονται οι παραπάνω ποσότητες. Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις ελέγχων υποθέσεων παρουσιάζονται αντίστοιχα παραδείγματα με Ιατρικά δεδομένα.

Σημαντικό κομμάτι της Μπεϋζιανής και ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι η επιλογή της εκ των προτέρων κατανομής κάθε φορά. Έχει γίνει μια σύντομη συζήτηση για αυτό το θέμα ενώ στα παραδείγματα που παρατίθενται χρησιμοποιήθηκαν οι κατανομές εκείνες που υπολογίστηκαν με τη χρήση πλασματικών δεδομένων. Οι επιπλέον ρουτίνες που έχουν κατασκευαστεί παριστάνουν γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του ή της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης σε σχέση με τις τιμές που λαμβάνει η εκ των προτέρων διασπορά των

παραμέτρων που περιλαμβάνονται στις υποθέσεις ελέγχου. Ακόμη, έχουν εφαρμοστεί αντίστοιχες ρουτίνες ως προς τις τιμές της σταθεράς με την οποία συγκρίνεται η μέση τιμή στις περιπτώσεις του ενός πληθυσμού. Τέλος, έχει γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων των Μπεϋζιανών τεστ και των τεστ σημαντικότητας για κάθε ένα από τα παραπάνω παραδείγματα.

Abstract

Bayesian Statistics makes statistical inference for a parameter of interest using the posterior distribution which combines available prior information and information provided by the data. Recently, the publications referring or using the Bayesian approach in Model Selection or comparison problems are increasing.

This dissertation includes a detailed review of Bayesian approaches on hypothesis testing. Specifically, the hypotheses which were tested are: the equality of mean of a normal population with a specified constant, the equality of means of two normal populations with the same or different variances and the equality of variances of two normal populations. Also, there has been a distinction between paired and unpaired populations. For every hypothesis testing we calculated the quantity which was used for the model comparison, Bayes Factor, the posterior distribution for each unknown parameter and the posterior probability of model of null hypothesis, as well as the credible intervals for unknown parameters. Moreover, we have constructed S-PLUS functions for computing the above quantities. For every of the above cases we present respectively examples in Medical data.

A sort discussion on the choice of the prior distributions and a comparison between the results of significance tests and posterior probabilities is also included. In the examples presented, we have used the imaginary data approach in order to construct plausible prior distributions. Additionally, we have constructed S-plus functions to access graphically the sensitivity of Bayes Factor (and its logarithm or the posterior probability of the null hypothesis) on different choices – values of the prior variance of the parameters which were involved in the hypothesis testing. Finally, similar graphs have been used to access the sensitivity of Bayes Factors on different values of the hypothesis tested.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή Στη Στατιστική Θεωρία Του Bayes

1.1 Ιστορική αναδρομή

Ο Thomas Bayes ήταν κληρικός και ερασιτέχνης μαθηματικός που έζησε στην Αγγλία τον 18ο αιώνα (Press, 1989). Δεν είναι γνωστή η ημερομηνία γέννησης του Thomas Bayes. Σύμφωνα όμως, με την επιγραφή στον τάφο του η ημερομηνία θανάτου του είναι στις 7 Απριλίου 1761 σε ηλικία 59 ετών, οπότε υπολογίζεται ότι γεννήθηκε το 1702, (Bernardo και Smith, 1994)

Σύμφωνα με τον Press (1989), υπάρχουν αμφιβολίες σχετικά με τον πραγματικό συγγραφέα της επιστημονική δημοσίευσης που αποδίδεται στον Bayes (Stigler, 1983) καθώς και τι ακριβώς λέει το θεώρημά αυτό (Stigler, 1982). Σύμφωνα με την ιστορική έρευνα του τελευταίου, πιθανός συγγραφέας της εργασίας φέρεται ένας διακεκριμένος τυφλός καθηγητής μαθηματικών στο Cambridge, ο Saunderson. Η εργασία του Bayes παρουσιάζει μία μεθοδολογία στατιστικής συμπερασματολογίας, για τις παραμέτρους διωνυμικής κατανομής με δεδομένες έναν αριθμό παρατηρήσεων που προέρχονται από αυτή την κατανομή. Στην εργασία αυτή, βασίζεται το θεώρημα του Bayes και σήμερα έχει γενικευτεί και για άλλες κατανομές, γεγονός που φαίνεται να γνώριζε ο Bayes αλλά προτίμησε να περιοριστεί στη δυωνυμική κατανομή.

Ο Laplace (1774) παρουσίασε το θεώρημα του Bayes στη γενική μορφή, ο οποίος σύμφωνα με τον Stigler (1986) πιθανών να μην επηρεάστηκε από τον Bayes, αφού εργαζόταν στην Γαλλία ενώ ο Bayes στην Αγγλία και το θεώρημα του δεν ήταν γνωστό. Ο Jeffreys (1939) επανεμφάνισε την εργασία του Laplace. Επίσης, ο James Bernoulli είχε περιγράψει ιδέες σχετικές με το θεώρημα του Bayes το 1713 στο βιβλίο του "Ars Conjectandi". Σε αυτό το βιβλίο ο Bernoulli ανέπτυξε το δυωνυμικό θεώρημα και περιέγραψε κανόνες σχετικούς με μεταθέσεις και συνδυασμούς. Επιπλέον, διατύπωσε το

πρόβλημα των αντίστροφων πιθανοτήτων 50 χρόνια νωρίτερα από τον Bayes χωρίς ωστόσο να δώσει καμία μαθηματική σχέση ή θεώρημα (Press, 1989).

Τα κύρια χαρακτηριστικά της Μπεϋζιανής θεωρίας είναι η εκ των προτέρων (prior) κατανομή και η συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood) που δίνουν την εκ των υστέρων (posterior) κατανομή. Η εκ των προτέρων κατανομή αντιπροσωπεύει την προηγούμενη γνώση που έχουμε για την παράμετρο, πριν την εφαρμογή των δεδομένων. Αυτό που επιτυγχάνεται με το θεώρημα του Bayes, είναι η βελτίωση της εκ των προτέρων γνώσης που έχουμε για την παράμετρο, σύμφωνα με την καινούρια γνώση που μας δίνει το παρατηρηθέν δείγμα εκφρασμένη μέσω της πιθανοφάνειας. Ο συνδυασμός της εκ των προτέρων και της δειγματικής πληροφορίας, μας δίνει την εκ των υστέρων πληροφορία που εκφράζεται μέσω της εκ των υστέρων κατανομής. Είναι λοιπόν, μια μεθοδολογική προσέγγιση που συνθέτει τη θεωρητική ή εμπειρική αντίληψη μιας τυχαίας δοκιμασίας, με τα παρατηρηθέντα δεδομένα.

1.2 Συμπερασματολογία κατά Bayes

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{y}^T = (y_1, ..., y_n)$ με $f(y_i \mid \theta)$ συνάρτηση κατανομής ή πυκνότητας που περιγράφει τις τυχαίες μεταβλητές $y_1, ..., y_n$ και θ είναι η υπό εκτίμηση παράμετρος. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι $f(\boldsymbol{y} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \theta)$, η οποία καθορίζει την πιθανότητα παρατήρησης διαφορετικών y_i κάτω από διαφορετικές τιμές της παραμέτρου θ. Η διαφορά της Μπεϋζιανής από την κλασική στατιστική έγκειται στο γεγονός ότι η παράμετρος θ δε θεωρείται σταθερός αριθμός, αλλά τυχαία ποσότητα στην οποία προσδίδεται μια εκ των προτέρων κατανομή $f(\theta)$ (Δελλαπόρτας, 1998). Η εκ των προτέρων κατανομή βασίζεται στις πληροφορίες που έχουμε από προηγούμενες έρευνες ή στις πεποιθήσεις μας τη δεδομένη στιγμή. Το αποτέλεσμα του θεωρήματος Bayes αφορά την εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου $f(\theta \mid \boldsymbol{y})$, δηλαδή την πληροφορία που έχουμε για την παράμετρο μετά την εφαρμογή των δεδομένων και δίνεται από τον τύπο:

$$f\left(\theta \mid \boldsymbol{y}\right) = \frac{f(\theta) f(\boldsymbol{y} \mid \theta)}{\int f(\theta) f(\boldsymbol{y} \mid \theta) d\theta} \tag{1.1}$$

Σημειώνουμε, ότι όταν η παράμετρος είναι διακριτή, τότε ο παρονομαστής αντικαθιστάται από το άθροισμα $\sum f(\theta_i) f(y \mid \theta_i)$.

Το αποτέλεσμα του παραπάνω ολοκληρώματος είναι συνάρτηση μόνο του $\boldsymbol{y}$, αφού ολοκληρώνεται ως προς θ, οπότε ένας εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης του θεωρήματος Bayes είναι:

$$f(\theta \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\theta) \cdot f(\boldsymbol{y} \mid \theta) \tag{1.2}$$

δηλαδή η εκ των υστέρων κατανομή είναι ανάλογη της εκ των προτέρων κατανομής πολλαπλασιαζόμενης με τη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Βέβαια, η εκ των προτέρων και η εκ των υστέρων κατανομή είναι έννοιες σχετικές, καθώς η κατανομή που είναι σήμερα εκ των υστέρων, αύριο μπορεί να είναι εκ των προτέρων, (Δελλαπόρτας, 1998). Αυτό γιατί το θεώρημα του Bayes βρίσκει εφαρμογή και όταν έχουμε διαδοχική συλλογή δεδομένων μιας μεταβλητής. Έτσι όταν έχουμε δύο ανεξάρτητα δείγματα $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, τότε

$$\begin{aligned} f(\theta \mid \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) &\propto f(\theta) \cdot f(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \mid \theta) \\ &= f(\theta) \cdot f_1(\boldsymbol{y}_1 \mid \theta) \cdot f_2(\boldsymbol{y}_2 \mid \theta) \\ &\propto f\left(\theta \mid \boldsymbol{y}_1\right) f_2(\boldsymbol{y}_2 \mid \theta) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Δηλαδή, μπορούμε να αναθεωρήσουμε την πληροφορία που έχουμε για την παράμετρο, υπολογίζοντας την εκ των υστέρων κατανομή του πρώτου δείγματος $f\left(\theta \mid \boldsymbol{y}_1\right)$ και χρησιμοποιώντας την ως εκ των προτέρων κατανομή για το δεύτερο δείγμα δεδομένων. Αυτή η διαδικασία είναι ιδιαίτερα εύχρηστη για την βελτίωση της εκ των υστέρων πληροφορίας όταν τα δεδομένα συλλέγονται διαδοχικά με το πέρας του χρόνου, όπως γίνεται στις κλινικές δοκιμές ή ίσως σε επιχειρησιακά ή οικονομικά δεδομένα (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Carlin και Louis, 1998, σελ. 24-25).

Παράδειγμα 1.1

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $y_1, \ldots, y_n$ από μια κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μέση τιμή μ και γνωστή διακύμανση σ^2. Οπότε η συνάρτηση πυκνότητας για τα y_i

είναι $f\left(y_i \mid \mu\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\left(y_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$ και η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$f(\boldsymbol{y} \mid \mu) \propto \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή για την παράμετρο μ, την κανονική κατανομή, δηλαδή $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \tau_0^2\right)$. Με βάση τη διατύπωση (1.2) του θεωρήματος Bayes έχουμε:

$$f(\mu \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\mu)\cdot f(\boldsymbol{y} \mid \mu)$$

$$f(\mu \mid \boldsymbol{y}) \propto \exp\left(-\frac{\left(\mu-\underset{\sim}{m}\right)^2}{2\tau_0^2}\right)\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\mu-\underset{\sim}{m}\right)^2}{2\tau_0^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\tau_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)\cdot\left(\theta-\frac{\frac{\underset{\sim}{m}}{\tau_0^2}+\frac{\overline{y}n}{\sigma^2}}{\frac{1}{\tau_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}\right)^2\right\} \tag{1.4}$$

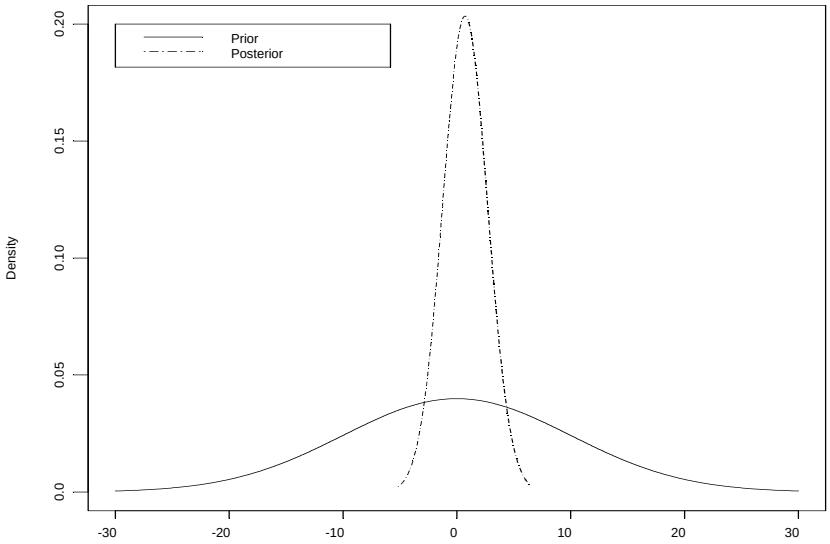
Άρα η εκ των υστέρων κατανομή για την παράμετρο μ θα έχει τη μορφή:

$$\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\frac{\frac{1}{\tau_0^2}m+\frac{n}{\sigma^2}\overline{y}}{\frac{1}{\tau_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}, \frac{1}{\frac{1}{\tau_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}\right) \tag{1.5}$$

<u>*Εφαρμογή 1.1*</u>

Έστω ένα τυχαίο δείγμα 100 παρατηρήσεων, $y_1,...,y_n$ κανονικής κατανομής με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 20. Η συνάρτηση πυκνότητας για τα y_i είναι

$f\left(y_i \mid \mu\right)=\frac{1}{20\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(y_i-0\right)^2}{2\cdot 400}\right\}$ και η συνάρτηση πιθανοφάνειας $f(\boldsymbol{y}\mid\mu)\propto\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-0\right)^2}{2\cdot 400}\right\}$. Επιλέγουμε για την εκ των προτέρων κατανομή για την παράμετρο μ, την κανονική κατανομή $\mu\sim N\left(0,100\right)$, οπότε υπολογίζεται η εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου $\mu\mid\boldsymbol{y}\sim N\left(0.72,3.846\right)$. Στο διάγραμμα 1.1, παρουσιάζονται γραφικά οι εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομές της παραμέτρου.



Διάγραμμα 1.1: *Εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομές της παραμέτρου μ*

1.3 Εκ των προτέρων κατανομή

Κατά την εφαρμογή των μεθόδων της Μπεϋζιανής συμπερασματολογίας, για την υπό εκτίμηση παράμετρο χρησιμοποιείται η προηγούμενη πληροφορία που έχουμε για την τιμή της, δηλαδή αυτή που έχουμε πριν γίνει η εφαρμογή στα δεδομένα του παρόντος

προβλήματος. Σε αυτό ακριβώς το σημείο έγκειται η βασική διαφορά της Μπεϋζιανής από την κλασική στατιστική, στη χρήση της εκ των προτέρων κατανομής, αφού η παράμετρος θεωρείται τυχαία μεταβλητή.

Κάθε πρόβλημα είναι ξεχωριστό και έχει το δικό του περιεχόμενο, από όπου πηγάζουν οι εκ των προτέρων πληροφορίες. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που αναφέρουν οι Carlin και Louis (1998, σελ. 26-27). Έστω θ η πιθανότητα επιτυχίας μιας καινούργιας χειρουργικής επέμβασης, τότε η εκ των προτέρων πληροφορία που θα έχουμε για το θ θα δίνεται από τις επιτυχίες που έχουν σημειωθεί κατά την ανεξάρτητη επανάληψη επεμβάσεων. Αντίθετα, αν θ είναι το ποσοστό των Ελλήνων αντρών που είναι HIV θετικοί, τότε δε μπορούμε να έχουμε επαρκή πληροφόρηση για την τιμή του θ. Επίσης, το θ δε μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς αφού μία ακριβής καταγραφή όλων των αντρών και του αποτελέσματος HIV δεν είναι εφικτή. Συνεπώς, εδώ το θ θα είναι τυχαίο αφού είναι άγνωστο, ωστόσο υπάρχουν κάποιες πεποιθήσεις, όπως ότι το θ=0.05 είναι πιο πιθανό από το θ=0.5. Η Μπεϋζιανή στατιστική βασίζεται στην υποκειμενική πιθανότητα, τις πεποιθήσεις, τις γνώσεις που έχουμε πριν αναλύσουμε τα δεδομένα τα οποία εκφράζονται με την εκ των προτέρων πληροφορία. Μέσω του θεωρήματος του Bayes η πληροφορία αναβαθμίζεται στην εκ των υστέρων πληροφορία όπου συνδυάζεται η εκ των προτέρων και η πληροφορία από τα δεδομένα.

1.3.1 Συζυγείς εκ των προτέρων κατανομές

Κατά την εφαρμογή του θεωρήματος Bayes, κάποιες επιλογές εκ των προτέρων κατανομών, εμφανίζουν υπολογιστικές δυσκολίες. Για το λόγο αυτό για αρκετό διάστημα η Μπεϋζιανή θεωρία περιορίστηκε σε κατανομές που διευκόλυναν τον υπολογισμό των εκ των υστέρων κατανομών, τέτοιες κατανομές είναι οι συζυγείς εκ των προτέρων κατανομές. Ως συζυγείς ορίζονται οι εκ των προτέρων κατανομές οι οποίες εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes καταλήγουν σε εκ των υστέρων κατανομές που ανήκουν στην ίδια οικογένεια κατανομών με την εκ των προτέρων κατανομή.

Είναι σημαντικό, να σημειωθεί ότι η χρήση των συζυγών εκ των προτέρων κατανομών δε γίνεται μόνο για λόγους ευκολίας. Θα ήταν λάθος να εννοηθεί ότι ο μόνος

λόγος χρήσης τους είναι η απλοποίηση των υπολογισμών που προσφέρουν. Χρησιμοποιούμε τις κατανομές αυτές όταν είναι συμβατές με τις πεποιθήσεις μας, όταν περιγράφουν την προηγούμενη γνώση που έχουμε για την παράμετρο.

Σύμφωνα με τον Δελλαπόρτα (1998, σελ. 32-33), δημιουργείται το ερώτημα, σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ή να εντοπίσουμε μία οικογένεια συζυγών κατανομών. Η μόνη περίπτωση στην οποία οι συζυγείς κατανομές προκύπτουν εύκολα, είναι για τα υποδείγματα που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Δηλαδή, όταν η συνάρτηση πυκνότητας ή πιθανότητας των παρατηρήσεων του δείγματος εκφράζεται με τη μορφή:

$$f(\boldsymbol{y}\,|\,\theta) = h(\boldsymbol{y})\,g(\theta)\exp\{t(\boldsymbol{y})\,c(\theta)\} \tag{1.6}$$

Όπου h, t είναι συναρτήσεις των παρατηρήσεων $\boldsymbol{y}$ και g, c συναρτήσεις της παραμέτρου θ, ενώ για τις συναρτήσεις h, g, t και c ισχύει:

$$\int f(\boldsymbol{y}\,|\,\theta)d\boldsymbol{y} = g(\theta)\int h(\boldsymbol{y})\exp\{t(\boldsymbol{y})\,c(\theta)\}d\boldsymbol{y} = 1 \tag{1.7}$$

Η εκθετική οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει μια σειρά από κατανομές όπως η εκθετική, η Poisson, η Γάμμα με μία παράμετρο, η δυωνυμική και η κανονική με γνωστή διακύμανση, με αποτέλεσμα να καθιστά τοπ προηγούμενο αποτέλεσμα εφαρμόσιμο σε πολλές περιπτώσεις. Ας δούμε ένα γενικευμένο παράδειγμα. Έστω δεδομένα $\boldsymbol{y}$ που ανήκουν στην οικογένεια εκθετικών κατανομών, η συνάρτηση πυκνότητας ή πιθανότητας θα έχει τη μορφή της 1.4 και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bayes

$$\begin{aligned} f(\theta\,|\,\boldsymbol{y}) &\propto f(\theta)\cdot f(\boldsymbol{y}\,|\,\theta) \\ &= f(\theta)\prod_{i=1}^{n}\{h(y_i)\}g(\theta)^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} t(y_i)\,c(\theta)\right\} \\ &\propto f(\theta)g(\theta)^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} t(y_i)\,c(\theta)\right\} \end{aligned}$$

Θεωρώντας την εκ των προτέρων κατανομή $f(\theta) \propto g(\theta)^d \exp\{bc(\theta)\}$, όπου d, b είναι γνωστές σταθερές. Οπότε προκύπτει η a-posteriori κατανομή

$$p(\theta\,|\,\boldsymbol{y}) \propto g(\theta)^{n+d} \exp\left\{c(\theta)\left[\sum_{i=1}^{n} t(y_i) + b\right]\right\} = g(\theta)^{\tilde{d}} \exp\{\tilde{b}c(\theta)\}$$

όπου $\tilde{d} = n + d$ και $\tilde{b} = \sum_{i=1}^{n} t(y_i) + b$, η οποία ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών με την εκ των προτέρων κατανομή, αλλά με προσαρμοσμένες παραμέτρους (Δελλαπόρτας 1998).

Παράδειγμα 1.2

Έστω y ο αριθμός των υπερτασικών που εισάγονται ημερησίως για θεραπεία σε ένα συγκεκριμένο νοσοκομείο. Η μεταβλητή y είναι διακριτή μεταβλητή και επιλέγουμε την Poisson με μέσο θ κατανομή για την περιγραφή του αριθμού προσέλευσης

$$f(y \mid \theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{y}}{y!}$$

Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα από n ημέρες, τότε $\boldsymbol{y}=(y_1,...,y_n)^T$ και το μοντέλο πιθανοφάνειας είναι $f(\boldsymbol{y} \mid \theta) \propto e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}$. Επιλέγουμε εκ των προτέρων κατανομή τη Γάμμα με μέσο $\frac{a}{\beta}$, $\theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ οπότε:

$$f(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta},\ \theta > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes:

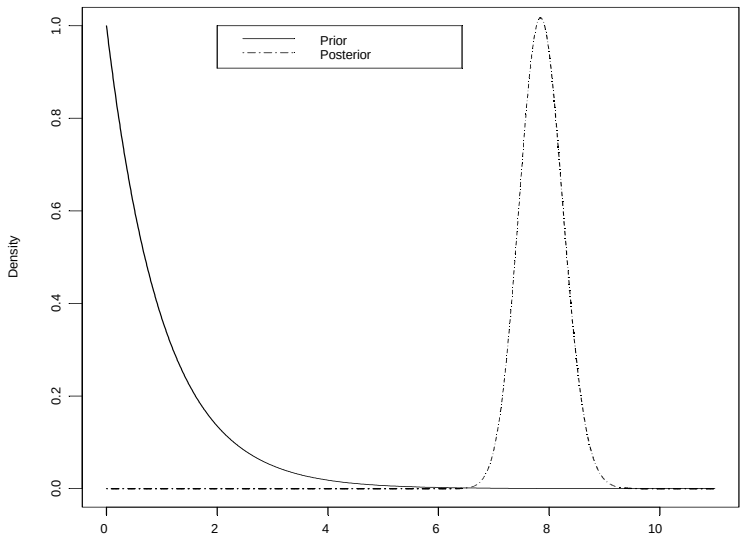
$$f(\theta \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\theta) \cdot f(\boldsymbol{y} \mid \theta) \propto \left(\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\right)\left(e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}\right) = \theta^{\alpha+\sum_{i=1}^{n} y_i - 1} e^{-\theta(\beta+n)}$$

$$\Rightarrow\ \theta \mid \boldsymbol{y} \sim \Gamma\left(\alpha + \sum_{i=1}^{n} y_i, \beta + n\right)\ \text{ ή }\ \theta \mid y \sim \Gamma(\alpha', \beta')$$

Συνεπώς, η εκ των υστέρων κατανομή του θ είναι η Γάμμα με παραμέτρους $\alpha + \sum_{i=1}^{n} y_i$ και $\beta + n$, δηλαδή ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών με την εκ των προτέρων κατανομή. Η Γάμμα κατανομή είναι η συζυγής εκ των προτέρων κατανομή για το μοντέλο της Poisson κατανομής.

Εφαρμογή 1.2

Έστω ότι παίρνουμε τυχαίο δείγμα 50 ημερών, και ο συνολικός αριθμός υπερτασικών που έφτασαν στο νοσοκομείο είναι 400, θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο αριθμό υπερτασικών που φτάνουν στο νοσοκομείο ημερησίως. Θεωρούμε ότι η εκ των προτέρων πληροφορία για την παράμετρο ακολουθεί την κατανομή Γάμμα μέση τιμή 1, $\theta \sim \Gamma(1,1)$. Μέσω του θεωρήματος του Bayes υπολογίζουμε την εκ των υστέρων πληροφορία για την παράμετρο $\theta \mid \boldsymbol{y} \sim \Gamma(401,51)$. Στο διάγραμμα 2.1, παρουσιάζονται γραφικά η εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομές.



Διάγραμμα 1.2: *Εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομές της παραμέτρου θ*

1.3.2 Ακατάλληλες εκ των προτέρων κατανομές

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.3, υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι πιθανό να μην έχουμε επαρκή εκ των προτέρων πληροφορία για την παράμετρο, δηλαδή η εκ των προτέρων πεποιθήσεις μας να μην είναι αντικειμενικές ή αξιόπιστες απέναντι στα δεδομένα. Τότε, θέλουμε να επιλέξουμε εκ των προτέρων κατανομές που να επηρεάζουν όσο το δυνατό λιγότερο τις εκ των υστέρων κατανομές. Σε αυτές τις περιπτώσεις, δημιουργείται το ερώτημα, αν είναι εφαρμόσιμη η Μπεϋσιανή συμπερασματολογία και

η απάντηση εισαγάγει την έννοια των μη πληροφοριακών (noninformative) εκ των προτέρων κατανομών. Σύμφωνα με τον Gelman et al (1998), η αιτιολογία για τη χρήση μη πληροφοριακών εκ των προτέρων κατανομών αναφέρει "ας αφήσουμε τα δεδομένα να μιλήσουν μόνα τους" οπότε η συμπερασματολογία δεν επηρεάζεται από τις εξωτερικές πληροφορίες των παρόντων δεδομένων.

Ανακαλούμε το παράδειγμα, (βλέπε επίσης Δελλαπόρτα, 1998 σελ.35-36 και Gelman etal, 1998 σελ. 52-53) της εκτίμησης του μέσου μ κανονικής κατανομής με γνωστή διακύμανση και κανονική εκ των προτέρων κατανομή $N\left(\underset{\sim}{m},\tau_0^2\right)$. Αν οι πληροφορίες μας για την παράμετρο είναι ασαφείς, τότε η ακρίβεια της εκ των προτέρων κατανομής, η οποία είναι ίση με $1/\tau_0^2$, πρέπει είναι μικρή $\left(\tau_0^2 \to \infty\right)$ οπότε και η εκ των υστέρων κατανομή να είναι προσεγγιστικά ίση με $\theta \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\bar{y},\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

Με τον τρόπο αυτό βρήκαμε μια εκ των προτέρων κατανομή, η οποία όμως παρουσιάζει ένα σοβαρό πρόβλημα. Καθώς $\tau_0^2 \to \infty$ η εκ των προτέρων κατανομή $N\left(\underset{\sim}{m},\tau_0^2\right)$ γίνεται επίπεδη με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbf{R}} f(\theta)d\theta$ να απειρίζεται, παραβιάζοντας έτσι την προϋπόθεση του ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όπου το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Οι Gelman et al (1998), καλούν την εκ των προτέρων κατανομή $f(\theta)$ γνήσια (proper) αν δεν εξαρτάται από τα δεδομένα και ολοκληρώνει στη μονάδα. Αντίθετα, αν το ολοκλήρωμα της prior ολοκληρώνει σε μια θετική πεπερασμένη τιμή τότε ονομάζεται μη κανονικοποιημένη πυκνότητα (*unnormalized density*) και κανονικοποιείται, πολλαπλασιαζόμενη με την αντίστοιχη σταθερά ώστε να ολοκληρώνει στη μονάδα.

Στο παραπάνω παράδειγμα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes καταλήξαμε σε μια γνήσια εκ των υστέρων κατανομή παρόλο που δεν χρησιμοποιήσαμε μια γνήσια εκ των προτέρων κατανομή. Αυτό όμως δε συμβαίνει πάντα. Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο είναι σωστό να επιλέγουμε μια μη γνήσια εκ των προτέρων κατανομή, που δείχνει την ανεπαρκή γνώση για μια παράμετρο, για να υπολογίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή. Ο Δελλαπόρτας (1998) αναφέρει ότι γενικά η χρήση "μη γνήσιων"

εκ των προτέρων κατανομή είναι αποδεκτή, γιατί αν επιλέξουμε για αυτή την εκ των προτέρων κατανομή, ακρίβεια διάφορη του μηδενός, θα έχουμε μια αποδεκτή εκ των προτέρων κατανομή και δεν θα υπάρχουν αμφιβολίες για την ορθότητα των επιλογών μας. Επίσης, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τιμή για την εκ των προτέρων ακρίβεια πολύ κοντά στο μηδέν και έτσι θα υπολογίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή, η οποία θα είναι πολύ κοντά (όμοια) με αυτή που βρήκαμε χρησιμοποιώντας τη μη γνήσια εκ των προτέρων κατανομή. Σημειώνουμε βέβαια, ότι οι εκ των υστέρων κατανομές που προέρχονται από μη γνήσιες εκ των προτέρων πρέπει να ερμηνεύονται με μεγάλη προσοχή.

Μία μέθοδος για τον καθορισμό των μη γνήσιων εκ των προτέρων κατανομών είναι η ιδέα του Jeffreys που βασίζεται στην πληροφορία του Fisher, (Δελλαπόρτας, 1998)

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{d^2 \log f(y \mid \theta)}{d\theta^2}\right\} = E\left\{\left(\frac{d \log f(y \mid \theta)}{d\theta}\right)^2\right\} \tag{1.8}$$

Η εκ των προτέρων κατανομή του Jeffreys γενικά ορίζεται ως $f_0(\theta) \propto \left|\mathrm{I}(\theta)\right|^{1/2}$

Παράδειγμα 1.3

Ανακαλούμε το παράδειγμα 1.1, όπου έχουμε ένα τυχαίο δείγμα $y_1,...,y_n$ κανονικής κατανομής $N(\mu,\sigma^2)$ και σ^2 γνωστό. Θα υπολογίσουμε την εκ των προτέρων κατανομή του Jeffreys $f_0(\mu)$.

$$f(\boldsymbol{y} \mid \mu) \propto \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \Rightarrow \log\left(f(\boldsymbol{y} \mid \mu)\right) = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Οπότε η πληροφορία του Fisher είναι $I(\mu) = -E\left\{\frac{d^2 \log f(y \mid \mu)}{d\mu^2}\right\} = \frac{n}{\sigma^2}$ και η εκ των προτέρων κατανομή του Jeffreys $f_0(\mu) \propto 1$ που είναι μια γνήσια εκ των προτέρων κατανομή.

Παράδειγμα 1.4

Θα υπολογίσουμε την εκ των προτέρων κατανομή του Jeffreys $f_0(\theta)$, για τυχαίο δείγμα Poisson κατανομής (παράδειγμα 1.2).

$$f(\boldsymbol{y} \mid \theta) \propto e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i} \Rightarrow \log\left(f(\boldsymbol{y} \mid \theta)\right) = -n\theta + \log(\theta)\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Οπότε η πληροφορία του Fisher είναι $I(\theta) = -E\left\{\frac{d^2 \log f(y \mid \theta)}{d\theta^2}\right\} = \frac{n}{\theta}$ και η εκ των προτέρων κατανομή του Jeffreys $f_0(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{1/2}}$ που είναι μια γνήσια εκ των προτέρων κατανομή.

1.3.3 Κατασκευή της εκ των προτέρων κατανομής με τη χρήση Πλασματικών δεδομένων

Θα χρησιμοποιήσουμε πλασματικά δεδομένα και το θεώρημα του Bayes για να κατασκευάσουμε λογικές εκ των προτέρων κατανομές. Η ιδιαιτερότητα των υπολογισμών στο σημείο αυτό έγκειται στο γεγονός ότι εφοδιάζουμε την πιθανοφάνεια με μία σταθερά C η οποία ελέγχει το βαθμό που πιστεύουμε και εμπιστευόμαστε τα πλασματικά μας δεδομένα. Η λογική αυτή συμφωνεί και με την προσέγγιση των Ibrahim και Chen (2000) και τις εκ-των-προτέρων κατανομές δύναμης 1/C (power priors) που εισήγαγαν στην Μπεϋζιανή βιβλιογραφία. Τις εκ των προτέρων κατανομές που υπολογίζονται με τη μέθοδο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε για τους ελέγχους υποθέσεων

του κεφαλαίου 3 και 4. Ο υπολογισμός τους παρουσιάζεται αναλυτικά στο Παράρτημα Α. Παρακάτω, παρουσιάζεται ο υπολογισμός της εκ των προτέρων κατανομής μόνο για την περίπτωση του ενός δείγματος.

Έστω ότι έχουμε μια ομάδα πλασματικών παρατηρήσεων $\boldsymbol{y}_1^* = (y_{11}^*, y_{12}^*, \cdots, y_{1n_1}^*)^T$ πλήθους n_1^*. Θεωρούμε κανονική κατανομή $\boldsymbol{y}_i^* \sim N\left(\mu, \tau^{-1}\right)$ για το σύνολο των πλασματικών παρατηρήσεων με μέση τιμή μ και ακρίβεια τ γνωστή και επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή για την μέση τιμή $\mu \sim N\left(m_0, \sigma_0^2 \tau^{-1}\right)$. Η σταθερά σ_0^2 εμπεριέχεται στην εκ των προτέρων διασπορά της μέσης τιμής οπότε θα λαμβάνει αρκετά μεγάλες τιμές δεδομένου ότι επιθυμούμε μη πληροφοριακή εκ των προτέρων κατανομή. Έτσι θα υπολογίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή της μέσης τιμής από τη σχέση $f(\mu, \tau \mid \boldsymbol{y}^*) \propto \left\{ \prod_{i=1}^{n} f(y_i^* \mid \mu, \tau) \right\}^{\frac{1}{C}} f(\mu, \tau)$, όπου οι πιθανές τιμές της παραμέτρου C=1,…,n_1^*. Αν επιλέξουμε C=n_1^* είναι σαν να δίδουμε βάρος στα πλασματικά δεδομένα ίσο με μία παρατήρηση. Συνεπώς, η εκ των υστέρων κατανομή που υπολογίζεται για $\sigma_0^2 \to \infty$ είναι $f(\mu \mid \boldsymbol{y}^*) \propto N\left(\overline{y}^*, \frac{C}{n^*} \tau^{-1} \right)$.

Στο εξής η εκ των προτέρων κατανομή που θα χρησιμοποιούμε για τη μέση τιμή δείγματος που προέρχεται από κανονική κατανομή γνωστής διασποράς σ^2 δίνεται από τη σχέση (1.9).

$$f(\mu) \propto N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n} \sigma^2 \right) \tag{1.9}$$

Επίσης, ορίζουμε τις ποσότητες:

$N = \frac{n^*}{C}$: ο αριθμό των "ενεργών" εκ των προτέρων στοιχείων των δεδομένων (effective prior points) και

$N' = \frac{N}{n^* + N}$: το ποσοστό των εκ των προτέρων σημείων.

Επιπλέον, η σταθερά C ρυθμίζει πόσο επίπεδη είναι η κατανομή, όσο αυξάνεται το C τόσο πιο επίπεδη γίνεται. Κατά την αριθμητική εφαρμογή, αντικαθίσταται με το

μέγεθος του δείγματος n, ώστε να αντανακλά όσο το δυνατό λιγότερη πληροφορία από τα πλασματικά δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε.

Στην περίπτωση, της άγνωστης ακρίβειας οι εκ των πρότερων κατανομές που θα χρησιμοποιούνται θα είναι:

$$\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n}\tau^{-1}\right),\ \tau \sim Gamma(a,b) \tag{1.10}$$

δεδομένου ότι η εκ των προτέρων που επιλέγουμε για την άγνωστη παράμετρο τ^{-1} δεν επηρεάζει σημαντικά την εκ των υστέρων κατανομή όταν τα α, b λαμβάνουν πολύ μικρές τιμές. (Kass and Raftery, 1995).

1.4 Πολυπαραμετρικά προβλήματα

Τα παραπάνω παραδείγματα αναφέρονταν σε μοντέλα μίας άγνωστης παραμέτρου. Συνήθως όμως, καλούμαστε να εκτιμήσουμε περισσότερες από μια άγνωστες παραμέτρους. Στην κλασική στατιστική, η αντιμετώπιση πολυπαραμετρικών προβλημάτων απαιτεί επιπλέον επιστημονική γνώση. Αντίθετα, στη Μπευζιανή στατιστική τα προβλήματα αυτά δεν απαιτούν επιπλέον γνώση, εφαρμόζονται οι ίδιες μέθοδοι με τα μοντέλα μίας παραμέτρου.

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{y}$, με p παραμέτρους, δηλαδή $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$. Επιλέγεται η εκ των προτέρων κατανομή $f(\boldsymbol{\theta})$ και συνδυαζόμενη με το μοντέλο πιθανοφάνειας $f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ υπολογίζεται η εκ των υστέρων κατανομή του $\boldsymbol{\theta}$ μέσω του θεωρήματος Bayes.

$$f\left(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}\right) = \frac{f(\boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \tag{1.13}$$

Όταν το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε μια μόνο από τις p παραμέτρους ή σε μια υποομάδα αυτών, υπολογίζεται η περιθώρια εκ των υστέρων κατανομή της υποομάδας αυτής ολοκληρώνοντας την από κοινού εκ των υστέρων κατανομή ως προς τις υπόλοιπες παραμέτρους, οι παράμετροι αυτές αναφέρονται ως ενοχλητικοί παράμετροι (nuisance

parameters) από τους Bernardo και Smith (1994). Συγκεκριμένα, η περιθώρια εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου θ_1 θα είναι:

$$p(\theta_1 \mid \boldsymbol{y}) \propto \int_{\theta_2} \ldots \int_{\theta_n} p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) d\theta_2 \ldots d\theta_n \tag{1.14}$$

Τα προβλήματα που δημιουργούνται κατά τη γενίκευση των προβλημάτων στις $\boldsymbol{p}$διαστάσεις έγκειται στον καθορισμό των εκ των προτέρων κατανομών, τον υπολογισμό και την ερμηνεία των εκ των υστέρων κατανομών, (Δελλαπόρτας, 1998 σελ. 43). Οι εκ των προτέρων κατανομές τώρα είναι πολυδιάστατες κατανομές οπότε πρέπει να αντιπροσωπεύουν την εκ των προτέρων πληροφορία μας για κάθε μια παράμετρο χωριστά, αλλά και τις συσχετίσεις ανάμεσα σε συνδυασμούς παραμέτρων. Οπότε η επιλογή κατάλληλων εκ των προτέρων κατανομών αλλά και ο συνδυασμός των εκ των προτέρων πληροφοριών είναι πιο δύσκολο πρόβλημα. Επίσης, τα υπολογιστικά προβλήματα που εμφανίζονται είναι πιο έντονα, γεγονός που κάνει τη χρήση των συζυγών κατανομών χρήσιμη. Τέλος, η εκ των υστέρων κατανομή έχει τόσες διαστάσεις όσες η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$, οπότε η ερμηνεία της είναι πολύπλοκη και μπορεί να απαιτείται συγκεκριμένη υλικοτεχνική υποδομή ώστε να δίνεται έμφαση στις πιο σημαντικές σχέσεις που περιλαμβάνει.

Παράδειγμα 1.5

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $y_1, \ldots, y_n$ κανονικής κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$ με μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2. Στην περίπτωση αυτή, καλούμαστε να εκτιμήσουμε δύο παραμέτρους και η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε δε θα είναι διαφορετική από αυτή του παραδείγματος 1.1. Η συνάρτηση πυκνότητας για τα y_i είναι $f(y_i \mid \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$ και η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας $f(\boldsymbol{y} \mid \mu) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left(-\frac{\sum (y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$.

Για κάθε άγνωστη παράμετρο επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές

$$\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \tau_0^2\right) \Rightarrow f\left(\mu\right) \propto \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{\left(\mu - \underset{\sim}{m}\right)^2}{2\sigma^2 c^2}\right)$$

$$\sigma^2 \sim IG(a,b) \Rightarrow f\left(\sigma^2\right) \propto \sigma^{-2(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes θα υπολογίσουμε την από κοινού εκ των υστέρων κατανομή.

$$\begin{aligned} f(\mu,\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) &\propto f(\boldsymbol{y} \mid \mu,\sigma^2) f(\mu,\sigma^2) \\ &= f(\boldsymbol{y} \mid \mu,\sigma^2) f(\mu \mid \sigma^2) f(\sigma^2) \\ &= \sigma^{-2(\alpha+1)-n-1} \exp\left(-\frac{\sum\left(y_i - \mu\right)^2}{2\sigma^2} - \frac{\left(\mu - \underset{\sim}{m}\right)^2}{2\sigma^2 c^2} - \frac{\beta}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Η εκ των υστέρων κατανομή κάθε παραμέτρου είναι

$$f(\mu \mid x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{y}) d\sigma^2 \quad \Rightarrow$$

$$\mu \mid y \sim t_{2a+n}\left(\frac{m + \overline{y} n c^2}{1 + c^2 n}, \sqrt{\frac{c^2\left(\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2 + \frac{n}{1+nc^2}\left(\overline{y} - \underset{\sim}{m}\right)^2 + 2b\right)}{\left(1 + c^2 n\right)\left(2a + n\right)}}\right)$$

$$f(\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu,\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) d\mu \quad \Rightarrow$$

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG\left(\alpha + \frac{n}{2}, \frac{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2 + \frac{n}{1+nc^2}\left(\overline{y} - \underset{\sim}{m}\right)^2 + 2\beta}{2}\right)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Έλεγχος Υποθέσεων

2.1 Εκ των Υστέρων Λόγος Πιθανοτήτων και ο Παράγοντας Bayes

Η ανάγκη της σύγκρισης εκτιμήσεων οδήγησε στον έλεγχο υποθέσεων. Στην κλασική στατιστική ο έλεγχος υποθέσεων βασίζεται στις θεωρήσεις των Fisher, Neyman και Pearson, όπου διατυπώνεται η αρχική υπόθεση (H_0) -αυτό που πραγματικά πιστεύει ο ερευνητής ή θέλει να αποδείξει- και η εναλλακτική υπόθεση (H_1). Υπολογίζεται το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητα (p-value) και συγκρίνεται με το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας που έχουμε ορίσει, (Carlin και Louis 1998).

Ο έλεγχος υποθέσεων στην κλασική στατιστική, παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα (Carlin και Louis, 1998 και Douglas Johnson, 1999). Εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση που συγκρίνεται ένα μοντέλο με ένα υπο-μοντέλο του, γεγονός που περιορίζει τον ερευνητή. Επίσης, δε μπορούμε ποτέ να αποδείξουμε την αρχική υπόθεση. Αυτό, γιατί στην περίπτωση των μικρών τιμών της παρατηρούμενης σημαντικότητας έχουμε ένδειξη ότι δεν ισχύει η αρχική υπόθεση (την απορρίπτουμε), ενώ στην περίπτωση των μεγάλων τιμών δεν απορρίπτουμε την αρχική υπόθεση, αλλά δε μπορούμε να πούμε και ότι ισχύει.

Η παρατηρούμενη σημαντικότητα δεν εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα της έρευνας αλλά και από τον σχεδιασμό της, κυρίως το μέγεθος του δείγματος. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος, τόσο μικρότερη είναι η τιμή της παρατηρούμενης σημαντικότητας, καταδεικνύοντας ένδειξη υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης, χωρίς να ισχύει στην πραγματικότητα, δημιουργώντας αληθοφανή αποτελέσματα.

Τέλος, ενώ τα συμπεράσματα μας βασίζονται στο παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας, αυτό δεν έχει στατιστική ερμηνεία. Διάφορες ερμηνείες του έχουν αποδοθεί από ερευνητές και συγγράμματα, όπως ότι είναι η πιθανότητα τα ευρήματα να είναι τυχαία, ή η πιθανότητα να είναι σωστή η αρχική υπόθεση. Ακόμη, η τιμή 1-

p_value έχει θεωρηθεί ως η πιθανότητα να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα αν η έρευνα επαναληφθεί. Οι ερμηνείες αυτές είναι λανθασμένες, δημιουργώντας σύγχυση και άγνοια στους μη εξοικειωμένους αναγνώστες, (Carlin και Louis 1998, σελ. 45-46).

Η προσέγγιση των ελέγχων υποθέσεων στην Μπεϋζιανή στατιστική, σύμφωνα με τον Jeffreys (1961), είναι πιο απλή και αποφεύγονται τα μειονεκτήματα της κλασικής στατιστικής. Η ποσότητα εκείνη που υπολογίζεται και χρησιμοποιείται για τη σύγκριση μοντέλων είναι ο παράγοντας Bayes (Bayes factor), που είναι ο λόγος των εκ των υστέρων συμπληρωματικών πιθανοτήτων προς τις εκ των προτέρων συμπληρωματικές πιθανότητες. Ας δούμε πως υπολογίζεται.

Έστω m_1 , m_2 τα μοντέλα που θα συγκρίνουμε για τα δεδομένα $\boldsymbol{y}$, όπου m_1 το μοντέλο τη αρχικής υπόθεσης με παραμέτρους το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}_1$ και m_2 το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης με παραμέτρους το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}_2$. Επιλέγουμε τις κατανομές που επεξηγούν τις εκ των προτέρων πληροφορίες για τις παραμέτρους, $f_i\left(\boldsymbol{\theta}_i\right), i=1,2$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes υπολογίζονται οι εκ των υστέρων πιθανότητες $f\left(m_1 \mid \boldsymbol{y}\right)=\dfrac{f\left(m_1\right) f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}{\sum_{i=1}^{2} f\left(m_i\right) f\left(\boldsymbol{y} \mid m_i\right)}$ και $f\left(m_2 \mid \boldsymbol{y}\right)=1-f\left(m_1 \mid \boldsymbol{y}\right)$ για τα δύο μοντέλα. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα, υπολογίζεται ο λόγος των εκ των υστέρων συμπληρωματικών πιθανοτήτων των δύο μοντέλων (posterior odds), PO=$\dfrac{f\left(m_1 \mid \boldsymbol{y}\right)}{f\left(m_2 \mid \boldsymbol{y}\right)}$ καθώς και ο παράγοντας Bayes του μοντέλου m_1 έναντι του m_2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BF} &= \frac{f\left(m_1 \mid \boldsymbol{y}\right) / f\left(m_2 \mid \boldsymbol{y}\right)}{f\left(m_1\right) / f\left(m_2\right)} \\
&= \frac{\left[\dfrac{f\left(m_1\right) f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}{\sum_{i=1}^{2} f\left(m_i\right) f\left(\boldsymbol{y} \mid m_i\right)}\right] \Big/ \left[\dfrac{f\left(m_2\right) f\left(\boldsymbol{y} \mid m_2\right)}{\sum_{i=1}^{2} f\left(m_i\right) f\left(\boldsymbol{y} \mid m_i\right)}\right]}{f\left(m_1\right) / f\left(m_2\right)} \\
&= \frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_2\right)} \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

όπου $f\left(\boldsymbol{y} \mid m_i\right)$ είναι η περιθωριακή κατανομή του $\boldsymbol{y}$ για κάθε μοντέλο και υπολογίζεται ολοκληρώνοντας ως προς τις παραμέτρους κάθε μοντέλου.

$$f\left(\boldsymbol{y} \mid m_i\right) = \int f\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}_i, m_i\right) f_i\left(\boldsymbol{\theta}_i\right) d\boldsymbol{\theta}_i \,,\; i = 1, 2 \tag{2.2}$$

Η τιμή του παράγοντα Bayes καθορίζει αν θα απορρίψουμε την αρχική υπόθεση. Μεγάλες τιμές του παράγοντα Bayes (μεγαλύτερες της μονάδας), καταδεικνύουν ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης. Σημειώνουμε, ότι εδώ παρουσιάσαμε τον παράγοντα Bayes του μοντέλου m_1 έναντι του m_2, ισοδύναμα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον παράγοντα Bayes του μοντέλου m_2 έναντι του m_1 με τα αντίστοιχα συμπεράσματα. Οι Kass και Raftery (1995), έδωσαν την πιθανή ερμηνεία του παράγοντα Bayes για τη σύγκριση των μοντέλων, πίνακας 2.1 (Kass και Raftery, 1995).

$2\log(BF_{10})$	BF_{10}	Ένδειξη έναντι του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης
0 έως 2	1 έως 3	Δεν είναι άξια αναφοράς
2 έως 6	3 έως 20	Θετική
6 έως 10	20 έως 150	Ισχυρή
> 10	>150	Κατηγορηματική

Πίνακας 2.1: *Ερμηνεία του παράγοντα Bayes σύμφωνα με τους Kass και Raftery όπου Bf_{10}: ο παράγοντας Bayes του μοντέλου m_2 έναντι του m_1 και $lof(BF_{10})$: ο φυσικός του λογάριθμος.*

2.2 Επιλογή μοντέλου

Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου, αυτό που κάνει όσο το δυνατό καλύτερη εφαρμογή στα δεδομένα, είναι σημαντικό κεφάλαιο της στατιστικής. Μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας και των επιστημονικών δημοσιεύσεων αναφέρεται στις μεθόδους της επιλογής μοντέλου. Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια περιληπτική αναφορά στο θέμα, βασισμένη στην εκτενή προσέγγιση του θέματος από τους Bernado και Smith (1994), George και McCulloch (1996), Raftery (1996), Carlin και Louis (1998), Ntzoufras (1999) και Lopes (2002).

2.2.1 Σύγκριση μοντέλων

Κριτήρια Επιλογής Μοντέλων

Κατά κύριο λόγο, η Μπεϋζιανή βιβλιογραφία για τη σύγκριση μοντέλων απαιτεί τον υπολογισμό των εκ των υστέρων πιθανοτήτων και των εκ των υστέρων συμπληρωματικών πιθανοτήτων ή τον παράγοντα Bayes. Επιλέγεται το μοντέλο που έχει τη μεγαλύτερη εκ των υστέρων πιθανότητα ως το κατάλληλο μοντέλο, δηλαδή αυτό που εφαρμόζει καλύτερα στα δεδομένα. Το πρώτο πρόβλημα στη σύγκριση μοντέλων, βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση της μη επαρκούς πληροφορίας για την εκ των προτέρων κατανομή των παραμέτρων. Τότε, ο παράγοντας Bayes που υπολογίζεται δεν έχει καλή ερμηνεία και δημιουργείται η ανάγκη να βρεθούν εναλλακτικοί τρόποι που να υπολογίζουν προσεγγιστικά τον παράγοντα Bayes χωρίς τη χρήση των εκ των προτέρων κατανομών. Τέτοια κριτήρια είναι τα BIC (Bayesian Information Criterion ή Shwartz Criterion) και το AIC (Akaike Information Criterion),

Το κριτήριο BIC, παρουσιάστηκε από τον Schwarz (1978), εφαρμόζεται όταν το μέγεθος του δείγματος n είναι πολύ μεγάλο και υπολογίζει προσεγγιστικά τον παράγοντα Bayes, χωρίς την επιλογή εκ των προτέρων κατανομών.

$$\Delta BIC = -2\log\left[\frac{\sup_{m_1} f\left(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)}{\sup_{m_2} f\left(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)}\right] - \left(p_2 - p_1\right)\log n$$

όπου ΔBIC είναι η διαφορά της πληροφορίας μεταξύ των δύο μοντέλων. Το πρώτο μέρος της σχέσης είναι ο λόγος των πιθανοφανειών των δύο μοντέλων και $p_2 - p_1$ είναι η διαφορά των παραμέτρων των μοντέλων, m_2 συμβολίζουμε το μεγαλύτερο μοντέλο και m_1 το μικρότερο. Προσεγγιστικά υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes

$$Bf = \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta BIC\right)$$

Το κριτήριο AIC, του Akaike (1973) εφαρμόζεται όταν το μέγεθος του δείγματος και ο αριθμός των παραμέτρων είναι πολύ μεγάλα.

$$\Delta AIC = -2\log\left[\frac{\sup_{m_1} f\left(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)}{\sup_{m_2} f\left(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)}\right] - 2\left(p_2 - p_1\right)$$

Ο υπολογισμός του παράγοντας Bayes, $\exp\left(-\frac{1}{2}ABIC\right)$, προϋποθέτει η πληροφορία της εκ των προτέρων κατανομής να αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό με την

πιθανοφάνεια, σχεδόν να αδύνατο να ισχύει. Ακόμη, αυτό το κριτήριο τείνει να υποστηρίζει τα μεγάλα μοντέλα, Carlin και Louis (1998 σελ. 48-50).

Monte Carlo εκτίμηση του Παράγοντα Bayes

Τα ολοκληρώματα που πρέπει να επιλυθούν για τον υπολογισμό των εκ των υστέρων πιθανοτήτων και εκ των υστέρων συμπληρωματικών πιθανοτήτων, πολλές φορές παρουσιάζουν μεγάλη δυσκολία. Πιθανόν να μην είναι δυνατή η χρήση συζυγών εκ των προτέρων κατανομών, οπότε στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για τον υπολογισμό των εκ των υστέρων πιθανοτήτων, όπως η μέθοδος Laplace, (βλέπε Kass και Raftery, 1995). Τα τελευταία χρόνια, χρησιμοποιούνται τεχνικές βασισμένες σε μεθόδους Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Με τις μεθόδους MCMC προσομοιώνονται παρατηρήσεις από την εκ των υστέρων κατανομή. Για κάθε παρατήρηση κατασκευάζεται μια αλυσίδα Markov. Η ιδιότητες των τιμών της Μαρκοβιανής αλυσίδας δίνει τη δυνατότητα στην επόμενη τιμή κάθε παρατήρησης να εξαρτάται από την παρούσα τιμή, όχι όμως από την προηγούμενη. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι ότι όταν ο αλγόριθμος της προσομοίωσης επαναλαμβάνεται πολλές φορές, η προσέγγιση της εκ των υστέρων κατανομής βελτιώνεται σε κάθε βήμα. Έτσι, δίνεται η ικανότητα στους Μπεϋζιανούς να εκτιμούν με ακρίβεια τις εκ των υστέρων κατανομές. Οι πιο δημοφιλείς μέθοδοι MCMC, είναι ο αλγόριθμος Metropolis-Hastings, και ο Gibbs sampler. Περισσότερες λεπτομέρειες από τους George και McCulloch (1993, 1996), Bernado και Smith (1994), Green (1995), Gelman et al (1998), Ntzoufras (1999), Lopes (2002)

Επιπλέον, οι μέθοδοι Monte Carlo χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του παράγοντα Bayes όταν το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.2 είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Έστω ένα δείγμα $\left\{\boldsymbol{\theta}_i^{(j)}, j=1,...,t\right\}$ μεγέθους t της εκ των προτέρων κατανομής $f\left(\boldsymbol{\theta}_i \mid m_i\right)$, όπου $\boldsymbol{\theta}_i$ είναι το διάνυσμα των παραμέτρων για το μοντέλο i και $\left\{m_i, i \in I\right\}$ είναι το σύνολο των μοντέλων. Μία τέτοια μέθοδος που εκτιμά την περιθώρια κατανομή του $\boldsymbol{y}$ για κάθε μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$\hat{f}\left(\boldsymbol{y} \mid m_i\right) = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} f\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}_i^{(j)}\right)$$

που είναι η στάθμιση της πιθανοφάνειας για κάθε τιμή του δείγματος. Η παραπάνω εκτίμηση δεν είναι καλή, όταν η πιθανοφάνεια έχει πολύ μικρότερη διασπορά από την εκ των προτέρων κατανομή. Καλύτερες εκτιμήσεις δίνει η μέθοδος Monte Carlo που βασίζεται στην προσομοίωση ενός δείγματος $\left\{\boldsymbol{\theta}_i^{(j)}, j=1,...,t'\right\}$ από μια αυθαίρετη κατανομή $g\left(\boldsymbol{\theta}_i \mid m_i\right)$

$$\hat{f}\left(\boldsymbol{y} \mid m_i\right)=\frac{\sum_{k=1}^{t} w_k f\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}_i^{(k)}, m_i\right)}{\sum_{k=1}^{t} w_k}$$

όπου $w_k=\frac{f\left(\boldsymbol{\theta}_i^k \mid m_i\right)}{g\left(\boldsymbol{\theta}_i^k \mid m_i\right)}$. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε στη θέση της αυθαίρετης συνάρτησης g, την εκ των υστέρων κατανομή. Λεπτομέρειες για τις μεθόδους Monte Carlo από τους Kass και Raftery (1995) και Ntzoufras (1999).

Επιλογή με Θεώρημα Απόρριψης

Έως εδώ είδαμε τη σύγκριση των μοντέλων ως ένα τρόπο να επιλέξουμε μέσα από ένα σύνολο υποψήφιων μοντέλων, αυτό που κάνει καλύτερη εφαρμογή στα δεδομένα. Με τον τρόπο αυτό, επιλέγοντας μόνο ένα μοντέλο αγνοείται η αβεβαιότητα (uncertainty) του μοντέλου με αποτέλεσμα να υποεκτιμάται η αβεβαιότητα για τις παραμέτρους ενδιαφέροντος. Θα ήταν ίσως προτιμότερο η επιλογή του μοντέλου να γινόταν με τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορούσαμε να υπολογίζαμε τη χρησιμότητα (ή εναλλακτικά την απώλεια) που έχουμε όταν επιλέγουμε ένα μοντέλο έναντι κάποιου άλλου. Ας δούμε τη θεωρία αποφάσεων (decision theory) στη Μπεϋζιανή στατιστική .

Έστω ότι θέλουμε να επιλέξουμε ή να συγκρίνουμε μοντέλα μέσα από ένα σύνολο $M=\left\{m_i, i \in I\right\}$. Τότε η συνάρτηση χρησιμότητας είναι $u\left(m_i, w\right)$, όπου w είναι το άγνωστο που θέλουμε να εκτιμήσουμε, στη συγκεκριμένη περίπτωση το μοντέλο που θα επιλέξουμε. Δηλαδή η συνάρτηση χρησιμότητας $u\left(m_T, m\right)$ εκφράζει την ωφέλεια όταν το σωστό μοντέλο είναι το m_T και εμείς επιλέγουμε το m. Σκοπός μας είναι να επιλέξουμε το μοντέλο που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνάρτηση απώλειας, δηλαδή

$$\bar{u}\left(m_i \mid y\right) = \int u\left(m_i, w\right) p\left(w \mid y\right) dw, \qquad i \in I$$

Οι πιο συνηθισμένες συναρτήσεις απώλειας που χρησιμοποιούνται για την επιλογή μοντέλου, είναι οι παρακάτω

- $u\left(m,m\right) = 1$ και $u\left(m,m'\right) = 0$, για κάθε $m' \neq m$, $m \in M$
- $u\left(m_k, m_l\right) = -u_{kl}$, όπου $-u_{kl}$ είναι σταθερή θετική τιμή.
- Kullback-Leibler ασυμφωνία των εκ των υστέρων κατανομών των υποψήφιων μοντέλων. Δηλαδή η απόσταση των δύο κατανομών.

$$K\left(f,g\right) = \int \log\left(\frac{f}{g}\right) f d\boldsymbol{y}$$

Αναλυτική προσέγγιση του θέματος από τους Bernado και Smith (1994), Ntzoufras (1999).

2.2.2 Μπεϋζιανή Στάθμιση μοντέλων

Στην προηγούμενη παράγραφο, περιγράψαμε την επιλογή του καλύτερου μοντέλου συγκρίνοντας τα υποψήφια μοντέλα. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μπορεί να υπάρχει ένα εναλλακτικό μοντέλο, το οποίο να κάνει εξίσου καλή εφαρμογή στα δεδομένα αλλά να μην υπάρχει ισχυρή ένδειξη για ένα εκ των δύο μοντέλων. Τότε, προτιμάται η μέθοδος της στάθμισης των μοντέλων (Bayesian Model Averaging, BMA).

Έστω Δ η παράμετρος ενδιαφέροντος, τότε η εκ των υστέρων κατανομή θα είναι

$$f\left(\Delta \mid \boldsymbol{y}\right) = \sum_{i \in I} f\left(\Delta \mid m_i, \boldsymbol{y}\right) f\left(m_i \mid \boldsymbol{y}\right) \tag{2.3}$$

όπου $m_i, i \in I$ είναι τα υποψήφια μοντέλα, $f\left(\Delta \mid m_i, \boldsymbol{y}\right)$ είναι η εκ των υστέρων κατανομή της Δ για κάθε μοντέλο m_i και $f\left(m_i \mid \boldsymbol{y}\right)$ η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου. Περισσότερες λεπτομέρειες από τους Kass και Raftery (1995), Carlin και Louis (1998), Hoeting και Raftery, (1999), Ntzoufras, (1999).

Η στάθμιση των μοντέλων παρουσίασε κάποιες δυσκολίες κατά την εφαρμογή του, όπως ότι ο αριθμός των συγκρινόμενων μοντέλων κάποιες φορές είναι πολύ μεγάλος δημιουργώντας πρόβλημα στους υπολογισμούς. Μια λύση στο πρόβλημα

αυτό δόθηκε από τους Madigan και Raftery (1994) με τη μέθοδο Occam's Window (βλ. Ntzoufras,1999), όπου υπολογίζεται ο μέσος όρος των πιο φειδωλών μόνο μοντέλων (όσο το δυνατό λιγότερες παραμέτρους) που υποστηρίζονται από τα δεδομένα. Αυτό επιτυγχάνεται με μια διπλή διαδικασία, αρχικά απορρίπτονται τα μοντέλα που είναι πιο μακριά (ως προς τις εκτιμήσεις) από το καλύτερο μοντέλο (σύνολο A').

$$A' = \left\{ m_i : \frac{\max\left\{ f\left(m_l \mid \boldsymbol{y}\right)\right\}}{f\left(m_i \mid \boldsymbol{y}\right)} \le \kappa^* \right\}$$

Στη συνέχεια αποκλείονται τα μοντέλα m_i για τα οποία υπάρχουν πιο απλά, εγγεγραμμένα σε αυτά μοντέλα, που έχουν μεγαλύτερη εκ των υστέρων πιθανότητα (σύνολο B).

$$B = \left\{ m_i : \exists m_l \in A', m_l \subset m_i, \frac{f\left(m_l \mid \boldsymbol{y}\right)}{f\left(m_i \mid \boldsymbol{y}\right)} > 1 \right\}$$

Τελικά υπολογίζουμε το μέσο όρο των μοντέλων που ανήκουν στο $A = A' \setminus B$ και η σχέση 2.3 γίνεται:

$$f\left(\Delta \mid \boldsymbol{y}\right) = \sum_{m_i \in A} f\left(\Delta \mid m_i, \boldsymbol{y}\right) f\left(m_i \mid \boldsymbol{y}\right) \tag{2.4}$$

Εναλλακτικός τρόπος για την αντιμετώπιση του παραπάνω εμποδίου για τη στάθμιση των μοντέλων είναι των αλγόριθμων MC^3 που βασίζονται σε μεθόδους MCMC, βλέπε Kass και Raftery (1995), Hoeting και Raftery (1999), Ntzoufras (1999).

Άλλα προβλήματα που παρουσιάζονται κατά την υλοποίηση της στάθμισης των μοντέλων, είναι οι υπολογιστικές δυσκολίες λόγω των ολοκληρωμάτων που περιέχονται στους αλγόριθμους. Κάποιες από αυτές έχουν ξεπεραστεί με τη χρήση μεθόδων MCMC. Επίσης χρειάζεται μεγάλη προσοχή κατά την επιλογή των εκ των προτέρων κατανομών για κάθε υποψήφιο μοντέλο. Τέλος, αφού ξεπεραστούν οι δυσκολίες η επιλογή του κατάλληλου υποσυνόλου μοντέλων στο οποίο θα γίνει η στάθμιση είναι πολύ βασικό σημείο. Περισσότερες πληροφορίες από τους Hoeting και Raftery (1999).

2.2.3 Το παράδοξο του Lindley

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα κανονικής κατανομής $y_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, με γνωστή διασπορά σ^2 και θέλουμε να ελέγξουμε την $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της $H_A : \theta \neq \theta_0$. Επιλέγουμε την ομοιόμορφη για την εκ των προτέρων κατανομή της παραμέτρου, εντός ενός διαστήματος που περιέχει την θ_0, με εκ των προτέρων πιθανότητα του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης, $f(H_0) = p$ και αντίστοιχη πιθανότητα για την εναλλακτική υπόθεση $f(H_1) = 1 - p$. Ο λόγος των εκ των υστέρων συμπληρωματικών πιθανοτήτων θα είναι:

$$PO = \frac{f(m_1 \mid \boldsymbol{y})}{f(m_2 \mid \boldsymbol{y})} = \frac{f(m_1) f(\boldsymbol{y} \mid m_1)}{f(m_2) f(\boldsymbol{y} \mid m_2)} = \frac{p}{1-p} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} \left(\bar{y} - \theta_0 \right)^2 \right\}$$

Ο Lindley (1957), παρατήρησε ότι όταν το μέγεθος του δείγματος n αυξάνεται, επίσης αυξάνεται και ο λόγος των εκ των υστέρων συμπληρωματικών πιθανοτήτων. Γεγονός που οδηγεί σε παράδοξο αφού για μεγάλα δείγματα αυξάνεται και η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης. Ο Bartlett (1957) παρατήρησε ότι το παράδοξο του Lindley σχετίζεται και με τη διασπορά της εκ των προτέρων κατανομής, συγκεκριμένα όσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά της, τόσο αυξάνεται και ο παράγοντας Bayes. Με άλλα λόγια επιλέγοντας εκ των προτέρων κατανομές με μεγάλη διασπορά καταλήγουμε σε ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης. Υπενθυμίζουμε ότι επιλέγουμε μεγάλες διασπορές στις εκ των προτέρων κατανομές, όταν θέλουμε να δείξουμε τη μη επαρκή γνώση για την παράμετρο. Για το λόγο αυτό, είναι προτιμότερο να αποφεύγονται οι χρήσεις μη γνήσιων εκ των προτέρων κατανομών. Το παράδοξο του Lindley οδήγησε σε μια σειρά δημοσιεύσεων που παρουσίαζαν διάφορες παραλλαγές του παράγοντα Bayes, με στόχο τη λύση αυτό του προβλήματος, βλέπε Carlin και Louis (1998), Ntzoufras (1999).

2.2.4 Παραλλαγές του παράγοντα Bayes

Η χρήση των μη πληροφοριακών εκ των προτέρων κατανομών οδήγησε στην κατασκευή παραλλαγών του παράγοντα Bayes όπως ο εκ των υστέρων (Posterior BF), ο κλασματικός (Fractional BF) και ο ενδογενής παράγοντας Bayes (Intrinsic BF)

(Ντζούφρας, 1999). Οι δύο πρώτοι δεν έγιναν ιδιαίτερα αποδεκτοί, ενώ επικράτησε κυρίως ο τελευταίος.

Ο εκ των υστέρων παράγοντας Bayes (Aitkin, 1991), υπολογίζεται μέσω της εκ των υστέρων κατανομής και όχι της εκ των προτέρων, δηλαδή

$$PBF = \frac{\int f\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}_1, m_0\right) f\left(\boldsymbol{\theta}_1 \mid m_0, \boldsymbol{y}\right) d\boldsymbol{\theta}_1}{\int f\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}_2, m_1\right) f\left(\boldsymbol{\theta} \mid m_1, \boldsymbol{y}\right) d\boldsymbol{\theta}_2} \tag{2.5}$$

Συνεπώς είναι δυνατή η χρήση μη γνήσιων εκ των προτέρων κατανομών με τη μέθοδο αυτή. Το κύριο μειονέκτημα του είναι το γεγονός ότι η πληροφορία των δεδομένων χρησιμοποιείται δύο φορές.

Ο κλασματικός παράγοντας Bayes, ήταν πρόταση του O'Hagan (1995) συνιστά τη χρήση ενός μέρους της πιθανοφάνειας για εκτίμηση και το υπόλοιπο για την επιλογή μοντέλου. Δηλαδή,

$$FBF_b\left(\boldsymbol{y}\right) = \frac{f\left(\boldsymbol{y}, b \mid m_1\right)}{f\left(\boldsymbol{y}, b \mid m_2\right)} \text{ και } f\left(\boldsymbol{y}, b \mid m_i\right) = \frac{\int f\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}_i, m_i\right) f_i\left(\boldsymbol{\theta}_i\right) d\boldsymbol{\theta}_i}{\int f\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}_i, m_i\right)^b f_i\left(\boldsymbol{\theta}_i\right) d\boldsymbol{\theta}_i}, \tag{2.6}$$

όπου $b=n_1/n$, το n_1 είναι θεωρείται το ελάχιστο δυνατό δείγμα που οδηγεί σε κατάλληλη εκ των υστέρων κατανομή, οπότε το b είναι μικρό και θετικό. Είναι ένας καλός τρόπος υπολογισμού του παράγοντα Bayes, όμως δε θεωρήθηκε ως καθαρά Μπεϋζιανή προσέγγιση (Ντζούφρας, 1999).

Οι Berger και Pericchi, (1996) πρότειναν τον ενδογενή παράγοντα Bayes. Τα δεδομένα διαιρούνται σε δύο μέρη, υπολογίζονται οι εκ των υστέρων κατανομές για το πρώτο μέρος και αυτές χρησιμοποιούνται ως εκ των προτέρων πληροφορίες για το δεύτερο μέρος. Η διαίρεση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το πρώτο μέρος να είναι το ελάχιστο δυνατό και να καταλήγει σε κατάλληλη εκ των υστέρων κατανομή.

$$IBF\left(\boldsymbol{y}_2 \mid \boldsymbol{y}_1\right) = \frac{f\left(\boldsymbol{y}_2 \mid \boldsymbol{y}_1, m_1\right)}{f\left(\boldsymbol{y}_2 \mid \boldsymbol{y}_1, m_2\right)} \tag{2.7}$$

Το μειονέκτημα είναι ότι μπορούμε να παράγουμε πολλούς τέτοιους παράγοντες από ένα δείγμα και για το λόγο αυτό οι συγγραφείς πρότειναν τη χρήση του μέσου ή του διάμεσου όλων των ενδογενών παραγόντων Bayes που υπολογίζονται από ένα δείγμα. Σε αυτή την περίπτωση μειονέκτημα είναι η δυσκολία υπολογισμού καθώς επίσης και ότι τα δύο αποτελέσματα μπορεί να μην συμπίπτουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Έλεγχοι Υποθέσεων ενός Πληθυσμού

3.1 Έλεγχος υποθέσεων για το μέσο ενός πληθυσμού

3.1.1 Πληθυσμός κανονικής κατανομής με σ^2 γνωστό

Θεωρούμε τυχαίο δείγμα κανονικής κατανομής $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, πλήθους n και γνωστής διασποράς σ^2. Καλούμαστε να ελέγξουμε την ισότητα της μέσης τιμής του δείγματος με μια συγκεκριμένη τιμή μ_0:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ έναντι της } H_1 : \mu \neq \mu_0 . \tag{3.1}$$

Τα αντίστοιχα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν τις παραπάνω υποθέσεις είναι:

$$m_0 : y_i \sim N\left(\mu_0, \sigma^2\right) \quad \text{και} \quad m_1 : y_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{3.2}$$

Στο μοντέλο m_0, δεν υπάρχει άγνωστη παράμετρος προς εκτίμηση και η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τον τύπο:

$$f(\boldsymbol{y} \mid \mu_0, m_0) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i \mid \mu_0\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \cdot \exp\left(-\frac{\sum\left(y_i - \mu_0\right)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{3.3}$$

Στο μοντέλο m_1, η παράμετρος προς εκτίμηση είναι το μ, θα εκφράσουμε την εκ των προτέρων πληροφορία της παραμέτρου, όπως υπολογίστηκε στο κεφάλαιο 1 (παρ. 1.3.3), με την κανονική κατανομή μέσης τιμής $\underset{\sim}{m}$ και διασποράς $\frac{C}{n}\sigma^2$. Επιλέξαμε την εκ των προτέρων διασπορά έτσι ώστε να είναι ανάλογη της διασποράς του δείγματος και της σταθεράς C (είναι ο βαθμός που πιστεύουμε ή εμπιστευόμαστε τα πλασματικά δεδομένα) και αντιστρόφως ανάλογη του μεγέθους του δείγματος. Δηλαδή, $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n}\sigma^2\right)$ ενώ η πιθανοφάνεια του μοντέλου δίνεται από τον τύπο:

$$f\left(\boldsymbol{y} \mid \mu, m_1\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \cdot \exp\left(-\frac{\sum\left(y_i - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3.4}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes, $f(\mu \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \mu) f(\mu)$ υπολογίζεται η εκ των υστέρων κατανομή για την παράμετρο $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m} + \overline{y}C}{1+C}, \frac{C\sigma^2}{n\left(1+C\right)}\right)$ ή εναλλακτικά παρουσιάζεται ως σταθμισμένος μέσος του δειγματικού και του εκ των προτέρων μέσου, δηλαδή

$$\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\frac{1}{1+C}\underset{\sim}{m} + \frac{C}{1+C}\overline{y}, \frac{C}{1+C}\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ή $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\left(1-w\right)\underset{\sim}{m} + w \cdot \overline{y}, w\frac{\sigma^2}{n}\right)$, με βάρος $w = \frac{C}{1+C}$. Ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας (credibility interval) της παραμέτρου μ είναι το $\frac{\underset{\sim}{m} + \overline{y}C}{1+C} \pm z_{q/2}\sqrt{\frac{C}{\left(1+C\right)}\frac{\sigma^2}{n}}$.

<u>*Παράγοντας Bayes:*</u>

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του μοντέλου m_0 έναντι του m_1:

$$\frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)} = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left[\frac{\sum\left(y_i - \mu_0\right)^2}{n} - \frac{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n} - \frac{\left(\overline{y} - \underset{\sim}{m}\right)^2}{1+C}\right]\right\}\sqrt{1+C} \tag{3.5}$$

Ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από

- τη μέση τετραγωνική απόσταση των δεδομένων από το μέσο της μηδενικής υπόθεσης
- τη μέση τετραγωνική απόσταση των δεδομένων από τον δειγματικό μέσο και
- την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας από τον εκ των προτέρων μέσο.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει για την ανάλυση μας, καθώς και από την τιμή της σταθεράς C, δηλαδή τη διασπορά που επιλέξαμε για την εκ των προτέρων κατανομή. Στην περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μεγάλο ($n \to \infty$), τότε ο

αντίστοιχος παράγοντας Bayes παίρνει πολύ μεγάλες τιμές και τείνει ασυμπτωτικά στο άπειρο. Δηλαδή όσο μεγαλύτερο δείγμα επιλέγουμε για την ανάλυση μας, τόσο αυξάνεται η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης. Γεγονός που οδηγεί σε διαφωνία της Μπευζιανης και των τεστ σημαντικότητας αφού υποστηρίζουν διαφορετικές υποθέσεις για μεγάλα δείγματα (Lindley's paradox, 1957).

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε μεγάλη τιμή για το C, δηλαδή εμπιστευόμαστε πολύ λίγο τα πλασματικά δεδομένα, επιτυγχάνουμε μεγάλη εκ των προτέρων διασπορά. Τότε υπολογίζεται τιμή του παράγοντα Bayes πολύ μεγάλη, τείνει δηλαδή υποστηρίζει το μοντέλο της μηδενικής υπόθεση, (καθώς $C \to \infty \Rightarrow BF \to \infty$). Η παρατήρηση αυτή έγινε από τον Shafer το 1982 σχετικά με το παράδοξο του Lindley όπου ανέφερε ότι όταν η εκ των προτέρων διασπορά είναι πολύ μεγαλύτερη της διασποράς του δείγματος η Μπεϋζιανή ανάλυση οδηγεί σε ένδειξη υπέρ της μηδενικής υπόθεσης σε αντίθεση με τα τεστ σημαντικότητας που δείχνουν ένδειξη έναντι σε αυτή (Shafer, 1982).

Ατνίθετα, όταν η τιμή του C γίνει πολύ μικρή ($C \to 0$), δηλαδή λαμβάνουμε υπόψη μεγάλη πληροφορία από τα πλασματικά δεδομένα και αντίστοιχα μικρή εκ των προτέρων διασπορά, τότε ο παράγοντας Bayes παίρνει την τιμή

$$\mathrm{BF} = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left[\left(\bar{y}-\mu_0\right)^2-\left(\bar{y}-\underset{\sim}{m}\right)^2\right]\right\}.$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας από το μέσο της μηδενική υπόθεσης και τον εκ των προτέρων μέσο. Όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα την τιμή του εκ των προτέρων μέσου την αντικαθιστούμε με την τιμή της μηδενικής υπόθεσης αφού αυτή θεωρούμε ως λογική τιμή, οπότε σε αυτή την περίπτωση ο παράγοντας Bayes παίρνει τιμές πολύ κοντά στη μονάδα. Δηλαδή, όταν η εκ των προτέρων διασπορά είναι πολύ μικρή (τείνει στο μηδέν) τότε η ένδειξη που θα πάρουμε προς οποιοδήποτε μοντέλο δε θα είναι άξια αναφοράς.

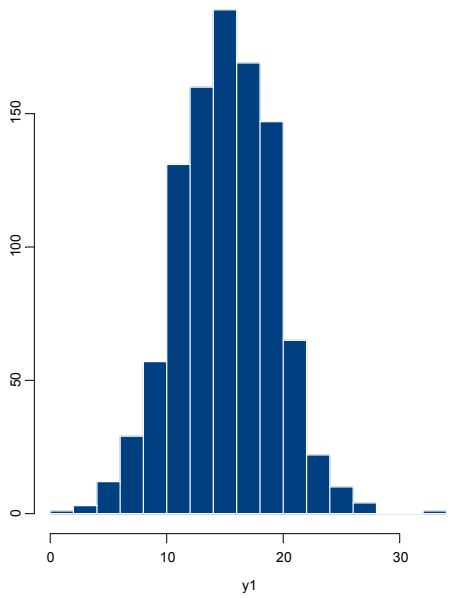
Παράδειγμα 3.1: *Προσομοιωμένα δεδομένα (1)*

Προσομοιώνουμε 1000 παρατηρήσεις (y_i) που προέρχονται από κανονική κατανομή με μέση τιμή 15 και τυπική απόκλιση 4. Στο διάγραμμα 3.1 παρουσιάζεται το ιστόγραμμα των παρατηρήσεων, θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή του δείγματος διαφέρει σημαντικά από την τιμή 15.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu = 15 \ \text{ έναντι της } \mathbf{H_A}: \ \mu \neq 15$$

Συγκρίνουμε τα μοντέλα $m_0 : y_i \sim N(15,16)$ και $m_1 : y_i \sim N(\mu,16)$. Για την άγνωστη παράμετρο μ επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n}\sigma^2\right)$.

Θεωρούμε ότι $\underset{\sim}{m}$ = 15 διότι αν πιστεύουμε ότι η υπόθεση H_0 : μ=15 αξίζει να ελεγχθεί, τότε έχουμε ισχυρές πεποιθήσεις ότι αυτή είναι η πραγματική του τιμή και C=1000 (ίσο με το μέγεθος του δείγματος) ως αρκετά μεγάλη τιμή ώστε να εξασφαλίσουμε μικρή πληροφορία από τα πλασματικά δεδομένα ή αντίστοιχα μεγάλη εκ των προτέρων διασπορά της παραμέτρου μ, συνεπώς $\mu \sim N(15,16)$.



Διάγραμμα 3.1: *Ιστόγραμμα των παρατηρήσεων y_i για το παράδειγμα 3.1.*

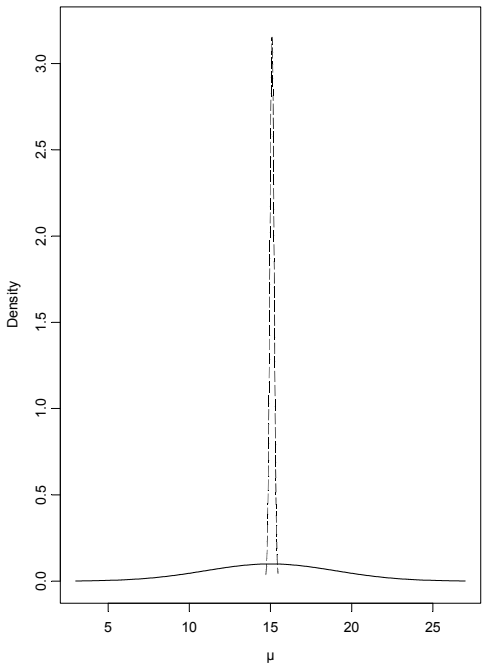
Στον πίνακα 3.1 (σελ. 37), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του παραπάνω ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από την εφαρμογή της ρουτίνας *bayesnormal.mean1* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 149). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\frac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)}$ =

23.23 > 1 άρα υπάρχει ισχυρή ένδειξη ότι υποστηρίζεται το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης, *δηλαδή η μέση τιμή της κατανομής δε διαφέρει από το 15.* Η εκ των υστέρων κατανομή που δίνεται από το θεώρημα του Bayes είναι $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N(15.09, 0.016)$. Ένα 95% διάστημα αξιοπιστίας της παραμέτρου μ είναι το [14.85 , 15.35]. Οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας αντίστοιχα, παρουσιάζονται γραφικά στο διάγραμμα 3.2.

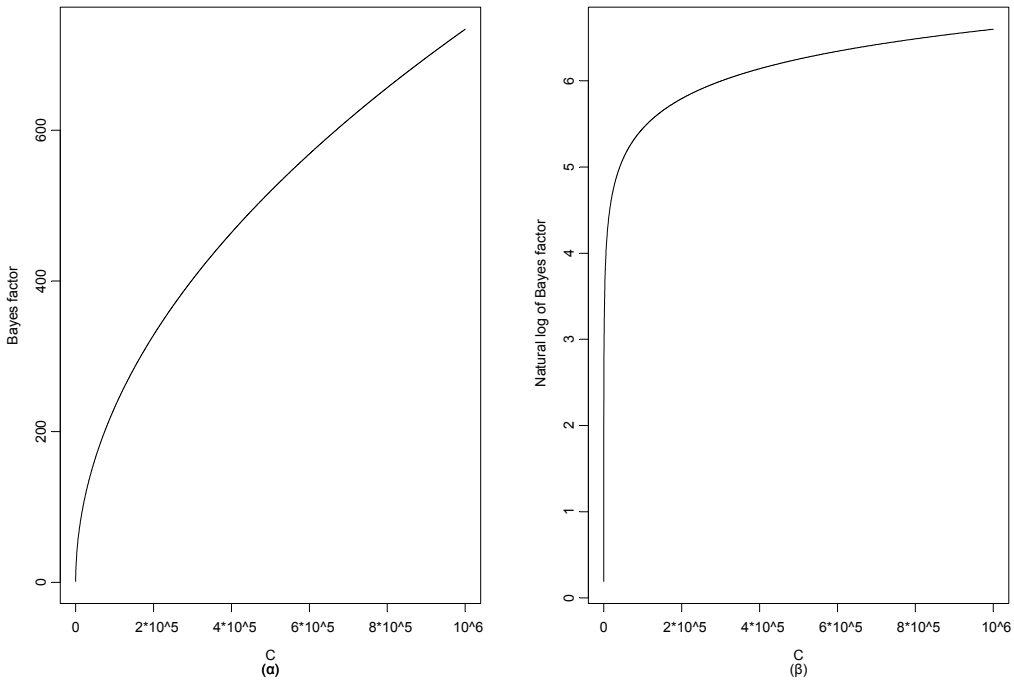
Στον παραπάνω έλεγχο, για τη σταθερά C επιλέξαμε μια αρκετά μεγάλη τιμή, C=n=1000. Επιπλέον, θα εξετάσουμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes όταν το C παίρνει τιμές πολύ μικρότερες ή πολύ μεγαλύτερες από το μέγεθος του δείγματος ή ισοδύναμα όταν επιλέγουμε πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη εκ των προτέρων διασπορά. Στο διάγραμμα 3.3, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του παράγοντα Bayes και του λογάριθμου του για τιμές του C από 1 ως 10^6 (δηλαδή από 1 εώς n^2), για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: μ_0=15. Προφανώς θεωρούμε ότι η εκ των προτέρων διασπορά παίρνει τιμές από σ^2/n έως $n\sigma^2$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes είναι (1.21 , 733.97) και του λογάριθμου (0.19 , 6.59). Όλες οι τιμές του παράγοντα Bayes είναι μεγαλύτερες της μονάδας (αντίστοιχα, του λογάριθμου μεγαλύτερες του μηδενός) οπότε, υπάρχει ένδειξη υπέρ της μηδενικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που ελέγξαμε. Τα γραφήματα καθώς και το εύρος τιμών των αντίστοιχων ποσοτήτων κατασκευάστηκαν με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf1* στο S-PLUS (βλέπε παράρτημα σελ. 150)

Τέλος, εξετάσαμε γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές του μ_0. Στο διάγραμμα 3.4, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του μ_0 από 12 ως 18 και C=1000. Τα γραφήματα κατασκευάστηκαν με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotm01* στο S-PLUS (βλέπε παράρτημα σελ. 151). Σημειώνουμε ότι για κάθε τιμή μ_0 για την οποία ελέγχουμε την ισότητα της με τη μέση τιμή του δείγματος, θεωρούμε για τον εκ των προτέρων μέσο $\underset{\sim}{m} = \mu_0$. Το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-296.46 , 3.45) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0 , 0.97). Το διάστημα τιμών του μ_0 [14.77, 15.43] είναι το διάστημα όπου υποστηρίζεται η μηδενική υπόθεση, δηλαδή εκείνο που αντιστοιχεί σε θετικές τιμές του λογάριθμου. Το διάστημα αυτό των τιμών του μ_0, θα το ορίσουμε

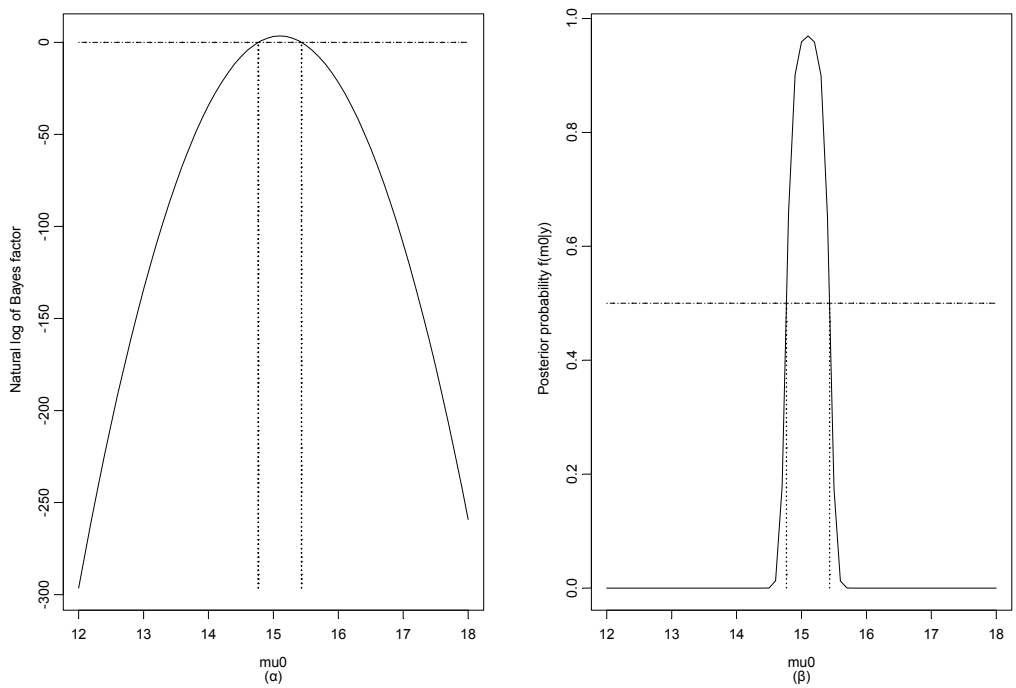
ως διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης υπό την εκ των προτέρων κατανομή.



Διάγραμμα 3.2: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων κατανομής του μέσου*



Διάγραμμα 3.3: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) BF και (β) του log-BF σε σχέση με το C (1 < C < 10^6).*



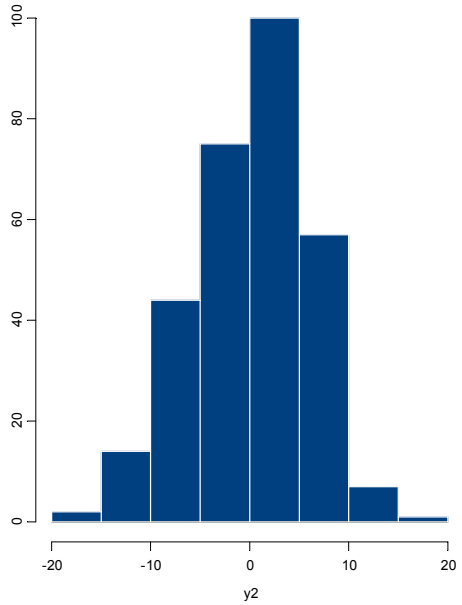
Διάγραμμα 3.4: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 για διαφορετικές υποθέσεις που αφορούν τον μέσο (12<μ<18).*

<u>*Παράδειγμα 3.2*</u>: *Προσομοιωμένα δεδομένα* (2)

Προσομοιώνουμε 300 τιμές (y_i) που προέρχονται από κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση 6. Στο διάγραμμα 3.5 παρουσιάζεται το ιστόγραμμα των παρατηρήσεων, θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος διαφέρει σημαντικά από την τιμή 10.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu = 10 \ \text{ έναντι της } \mathbf{H_1}: \ \mu \neq 10 .$$

Συγκρίνουμε τα μοντέλα $m_0 : y_i \sim N(10,36)$ και $m_1 : y_i \sim N(\mu,36)$. Για την άγνωστη παράμετρο μ επιλέγουμε για την εκ των προτέρων κατανομή την κανονική με μέση τιμή $\underset{\sim}{m}$=10 αφού πιστεύουμε ισχυρά ότι αυτή είναι η τιμή της μέσης τιμής του δείγματος και διασπορά $\frac{C}{n}\sigma^2$ όπου C επιλέγουμε την τιμή 300 ως αρκετά μεγάλη τιμή, δηλαδή $\mu \sim N(10,36)$.



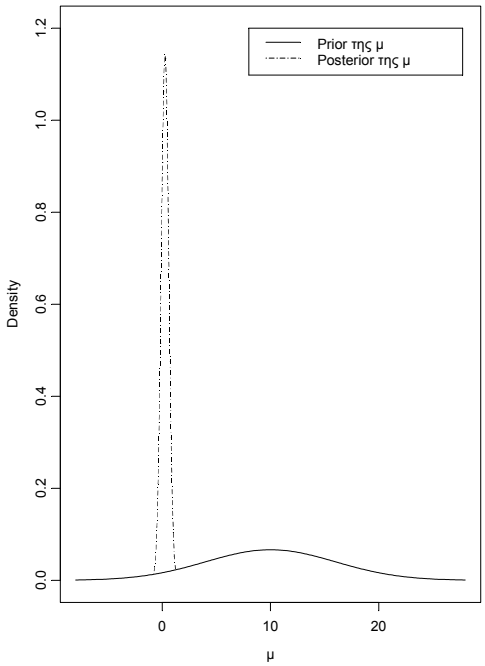
Διάγραμμα 3.5: *Ιστόγραμμα των παρατηρήσεων y_i του παραδείγματος 3.2*

Στον πίνακα 3.1 (σελ. 37) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των παραπάνω ελέγχων, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.mean1* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ 149). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = $3.57\cdot 10^{-172} < 1$, άρα η ένδειξη έναντι της μηδενικής υπόθεσης είναι κατηγορηματική, *δηλαδή υποστηρίζεται το εναλλακτικό μοντέλο, η μέση τιμή διαφέρει από την τιμή 10*. Η εκ των υστέρων κατανομή που δίνεται από το θεώρημα του Bayes είναι $\mu\,|\,\boldsymbol{y} \sim N(0.25, 0.12)$ με 95% διάστημα αξιοπιστίας [-0.43 , 0.92]. Στο διάγραμμα 3.6 εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας, αντίστοιχα.

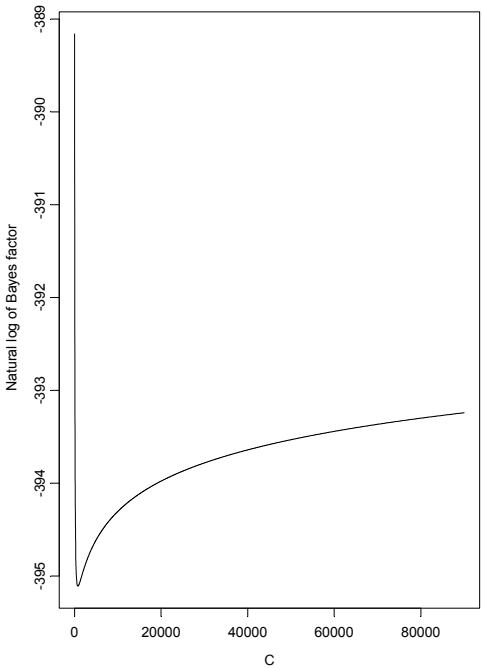
Στη συνέχεια, εξετάσαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές του C. Δεδομένου ότι προηγούμενα επιλέξαμε C=n=300, τώρα θα θεωρήσουμε ότι η σταθερά C παίρνει τιμές πολύ μικρότερες ή πολύ μεγαλύτερες του n. Στο διάγραμμα 3.7 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του λογάριθμου του παράγοντα Bayes για τιμές του C από 50 ως $9\cdot 10^4$ (δηλαδή από 50 έως n^2). Με τον τρόπο αυτό ελέγχουμε που κυμαίνονται οι τιμές του παράγοντα Bayes όταν η εκ των προτέρων διασπορά παίρνει τιμές από $0.17\cdot\sigma^2$ έως $300\cdot\sigma^2$. Παρατηρούμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-395.11 , -389.16) οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της

αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που μελετήσαμε (εφαρμόστηκε η ρουτίνα *plotbf1*, βλέπε παράρτημα σελ. 150).

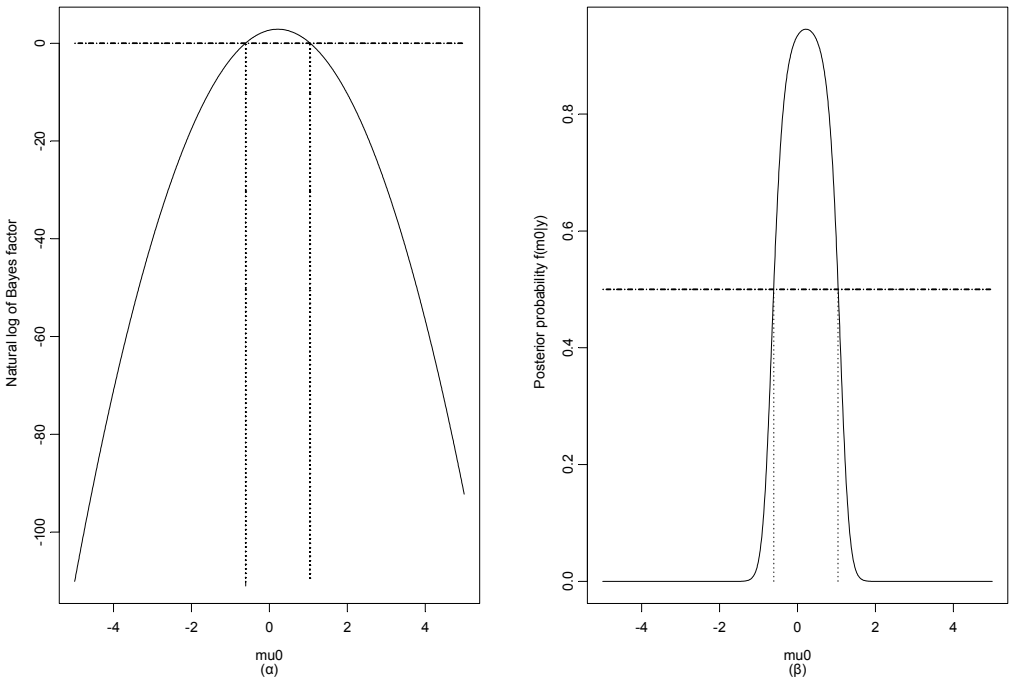
Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotm01* (βλέπε παράρτημα σελ. 151) παραστήσαμε γραφικά την ευαισθησία του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του μ_0 από -5 ως 5 και C=300, διάγραμμα 3.8. Διαπιστώνουμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-110.08 , 2.85) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 (0 , 0.95). Το διάστημα τιμών του μ_0 [-0.61 , 1.04] είναι το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή το διάστημα όπου για όλες τις τιμές του μ_0 υποστηρίζεται η μηδενική υπόθεση. Σημειώνουμε ότι έχουμε θεωρήσει $\underset{\sim}{m} = \mu_0$ για κάθε έλεγχο της ισότητας της μ_0 με τη μέση τιμή.



Διάγραμμα 3.6: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων κατανομής του μέσου*



Διάγραμμα 3.7: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του log-BF σε σχέση με το C* ($50<C< 9*10^4$).



Διάγραμμα 3.8: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου* m_0 *για διαφορετικές υποθέσεις που αφορούν τον μέσο* ($-5<\mu<5$).

		Παρ. 3.1	Παρ. 3.2
		$\mu_0=15$	$\mu_0=10$
BF	*Παράγοντας Bayes*	23.23	$3.57*10^{-172}$
log(BF)	*Λογάριθμος του παρ. Bayes*	3.15	-394.77
$f(m_0\|y)$	*Εκ των υστέρων πιθ. του* m_0	0.958	$3.57*10^{-172}$
$E(\mu\|y)$	*Εκ των υστερών μέσος*	15.09	0.25
$V(\mu\|y)$	*Εκ των υστερών σταθ. απόκλ.*	0.126	0.346
	Ένδειξη έναντι της H_1:	Ισχυρή	
	Ένδειξη έναντι της H_0:		Κατηγορηματική

Πίνακας 3.1: *Συνοπτικός πίνακας εκ των υστέρων ανάλυσης για τα παρ. 3.1, 3.2*

3.1.2 Πληθυσμός κανονικής κατανομής με σ^2 άγνωστο

Θεωρούμε τυχαίο δείγμα κανονικής κατανομής $y_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ πλήθους n και άγνωστης διασποράς σ^2. Θα γίνει ο έλεγχος της ισότητας της μέσης τιμής του δείγματος με μια συγκεκριμένη τιμή μ_0, όπως στην ενότητα 3.1.1. Τα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν τις υποθέσεις μας θα είναι όμοια με προηγούμενα, (βλέπε τύπους 3.1, 3.2) με τη διάφορά ότι το σ^2 είναι άγνωστη (προς εκτίμηση) παράμετρος.

Έτσι, στο μοντέλο m_0 για την παράμετρο σ^2 επιλέγουμε (σύμφωνα με την παράγραφο 1.3.3) αντίστροφη γάμμα εκ των προτέρων κατανομή με παραμέτρους α, b, $\sigma^2 \sim IG(a,b)$ ή ισοδύναμα γάμμα κατανομή με μέσο α/b για την παράμετρο της ακρίβειας $\tau = \sigma^{-2}$, τ~G(α,b). Η πιθανοφάνεια παραμένει η ίδια όπως στην προηγούμενη ενότητα και δίνεται από τον τύπο 3.3. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes, $f(\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \sigma^2) f(\sigma^2)$, υπολογίζεται η εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}, m_0 \sim IG\left(a + \frac{n}{2}, \frac{\sum (y_i - \mu_0)^2}{2} + b \right)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε $f\left(\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}, m_0\right) \sim IG\left(a', b'\right)$, όπου $a' = a + \frac{n}{2}$ και $b' = \frac{\sum\left(y_i - \mu_0\right)^2}{2} + b$. Ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας για την παράμετρο σ^2, είναι το διάστημα $P\left(k_1 \le \sigma^2 \le k_2\right) = 1 - q$, όπου για τα k_1, k_2 ισχύουν $Gamma_{1/k_1}\left(a', b'\right) = 1 - \frac{q}{2}$ και $Gamma_{1/k_2}\left(a', b'\right) = \frac{q}{2}$.

Στο μοντέλο m_1, για τις άγνωστες παραμέτρους μ, σ^2, επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, C\frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\sigma^2 \sim IG(a,b)$ (ή ισοδύναμα $\tau = \frac{1}{\sigma^2} \sim G(a,b)$), ενώ η πιθανοφάνεια δίνεται από τον τύπο 3.4. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes, $f(\mu, \sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \mu, \sigma^2) f(\mu, \sigma^2)$, υπολογίζονται οι εκ των υστέρων κατανομές για τις παραμέτρους

$$\mu \mid \boldsymbol{y}, m_1 \sim t_{2a+n}\left(\frac{\underset{\sim}{m} + \bar{x}C}{1+C}, \frac{C\left(\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \frac{n}{1+C}\left(\bar{x} - \underset{\sim}{m}\right)^2 + 2b\right)}{n\left(2a+n\right)\left(1+C\right)}\right)$$

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}, m_1 \sim IG\left(a + \frac{n}{2}, \frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2 + \frac{n}{1+C}\left(\bar{y} - \underset{\sim}{m}\right)^2 + 2b}{2}\right).$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε $\mu \mid y \sim t_{2a+n}\left(\tilde{m}, \sigma'^2\right)$, όπου $\tilde{m} = \frac{\underset{\sim}{m} + \bar{x}C}{1+C}$, $\sigma'^2 = \frac{C\left(\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2 + \frac{n}{1+C}\left(\bar{y} - \underset{\sim}{m}\right)^2 + 2b\right)}{n\left(2a+n\right)\left(1+C\right)}$, δηλαδή η εκ των υστέρων κατανομή της μ ακολουθεί την Student-t κατανομή με $2a+n$ βαθμούς ελευθερίας, μέση τιμή $\tilde{m}$ και διασπορά σ'^2. Επίσης, γράφουμε $\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG\left(a', b'\right)$ όπου $a' = a + \frac{n}{2}$ και $b' = \frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2 + \frac{n}{1+C}\left(\bar{y} - \underset{\sim}{m}\right)^2}{2} + b$. Ένα 100(1-q)% διάστημα

αξιοπιστίας για την παράμετρο μ είναι το $\tilde{m} \pm t_{2a+n,q/2}\sigma'$, για την παράμετρο σ^2 το $P\left(k_1 \le \sigma^2 \le k_2\right) = 1-q$, όπου $Gamma_{1/k_1}\left(a',b'\right) = 1-\frac{q}{2}$ και $Gamma_{1/k_2}\left(a',b'\right) = \frac{q}{2}$.

<u>Παράγοντας Bayes</u>

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του μοντέλου m_0 έναντι του m_1:

$$\frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)} = \sqrt{1+C}\left(\frac{b+\frac{n}{2}\left(\frac{\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{n}+\frac{\left(\bar{y}-\underset{\sim}{m}\right)^2}{1+C}\right)}{b+\frac{\sum\left(y_i-\mu_0\right)^2}{2}}\right)^{a+n/2} \tag{3.6}$$

Ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από:

- τη μέση τετραγωνική απόσταση των δεδομένων από τον δειγματικό μέσο
- την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας από τον εκ των προτέρων μέσο και
- την αντίστοιχη απόσταση των δεδομένων από το μέσο της μηδενικής υπόθεσης.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει για την ανάλυση μας, καθώς και από την τιμή της σταθεράς C, δηλαδή τη διασπορά που επιλέξαμε για την εκ των προτέρων κατανομή της μέσης τιμής. Στην περίπτωση που επιλέγουμε μέγεθος δείγματος πολύ μεγάλο τότε και ο παράγοντας Bayes που υπολογίζεται είναι μεγάλος, δηλαδή τείνει ασυμπτωτικά (όταν $n \to \infty$) στο άπειρο. Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας μεγάλο δείγμα στη Μπεϋζιανή συμπερασματολογία έχουμε ένδειξη υπέρ της μηδενικής υπόθεσης ενώ το αντίστοιχο τεστ σημαντικότητας θα την απορρίψει, (Παράδοξο του Lindley, 1957).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μεγάλη τιμή για το C, δηλαδή μεγάλη διασπορά για την εκ των προτέρων κατανομή, τότε αυξάνεται η τιμή του παράγοντα Bayes, τείνει δηλαδή να υποστηρίξει τη μηδενική υπόθεση (καθώς $C \to \infty \Rightarrow BF \to \infty$). Το γεγονός ότι όταν η εκ των προτέρων διασπορά είναι πολύ μεγαλύτερη της διασποράς του δείγματος η Μπεϋζιανή ανάλυση οδηγεί σε ένδειξη

υπέρ της μηδενικής υπόθεσης σε αντίθεση με τα τεστ σημαντικότητας, (παράδοξο του Bartlett, 1957).

Όταν η σταθερά C παίρνει πολύ μικρές τιμές ($C \to 0$) δηλαδή θεωρούμε σχεδόν μηδενική την εκ των προτέρων διασπορά της παραμέτρου μ, ο παράγοντας Bayes τείνει προς μια σταθερή τιμή.

$$\mathrm{BF} = \left(\frac{2b + \sum \left(y_i - \underset{\sim}{m} \right)^2}{2b + \sum \left(y_i - \mu_0 \right)^2} \right)^{a + n/2}.$$

Δεδομένου όμως ότι κατά τον έλεγχο τον υποθέσεων, όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα, την τιμή του εκ των προτέρων μέσου την αντικαθιστούμε με την τιμή της μηδενικής υπόθεσης αφού αυτή θεωρούμε ως λογική τιμή, τότε ο παράγοντας Bayes παίρνει τιμές πολύ κοντά στη μονάδα. Δηλαδή, όταν η εκ των προτέρων διασπορά που επιλέγουμε για τις παραμέτρους των υποθέσεων είναι πολύ μικρή (τείνει στο μηδέν) τότε η ένδειξη που θα πάρουμε προς οποιοδήποτε μοντέλο δε θα είναι άξια αναφοράς.

Παράδειγμα 3.3: *Δεδομένα λευχαιμίας*

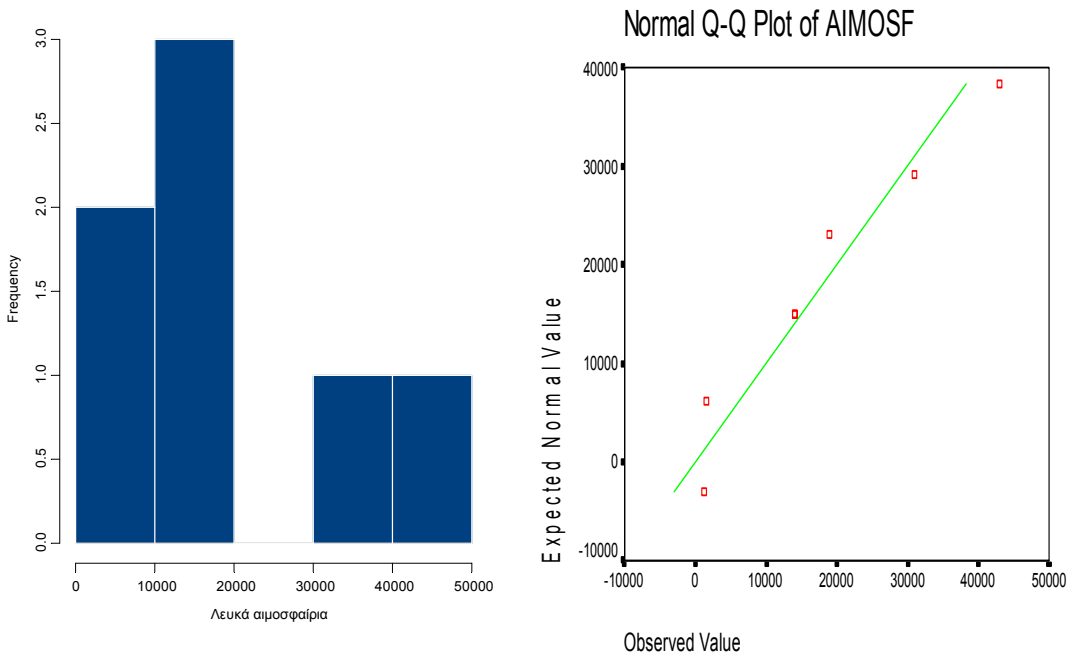
Σε μία έρευνα μετρήθηκαν οι τιμές λευκών αιμοσφαιρίων σε 7 ενήλικες άνδρες που έπασχαν από κάποια μορφή λευχαιμίας, (Τζώνου και Κατσουγιάννη, 1997). Οι τιμές που βρέθηκαν είναι:

19000	31000	1300	1500	43000	14000	14000

Οι τιμές των λευκών αιμοσφαιρίων των ασθενών αυτών θα συγκριθούν με την τιμή 10000, η οποία θεωρείται ως ανώτερη φυσιολογική. Στο διάγραμμα 3.9 παρουσιάζεται το ιστόγραμμα και το Normal Q-Q plot των παρατηρήσεων, από τα οποία θεωρούμε την κατανομή τους κανονική, $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Η μέση τιμή των λευκών αιμοσφαιρίων των ατόμων της έρευνας είναι 17685.71. Θα ελέγξουμε αν η τιμή αυτή διαφέρει από την ανώτερη φυσιολογική,

δηλαδή αν τα άτομα που πάσχουν από κάποια μορφή λευχαιμίας έχουν κατά μέσο όρο αριθμό λευκών αιμοσφαιρίων μεγαλύτερο από τη φυσιολογική τιμή.



Διάγραμμα 3.9: *Το ιστόγραμμα και το normal Q-Q plot των παρατηρήσεων του παραδείγματος 3.3*

$$\mathbf{H_0}: \ \mu = 10000 \ \text{ έναντι της } \mathbf{H_1}: \ \mu \neq 10000$$

Τα αντίστοιχα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν οι παραπάνω υποθέσεις είναι:

$$m_0 : y_i \sim N\left(10000, \sigma^2\right) \text{ και } m_1 : y_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Για την παράμετρο μ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή $\mu \sim N\left(10000, \sigma^2\right)$, ενώ για την παράμετρο της διασποράς επιλέγουμε την $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$ και για τα δύο μοντέλα. Για την εκ των προτέρων μέση τιμή επιλέξαμε $\underset{\sim}{m}$ =10000 αφού έχουμε ισχυρές πεποιθήσεις ότι αυτή είναι η τιμή της μέσης τιμής δεδομένου ότι ελέγχουμε την υπόθεση H_0: μ=10000 και C=7 (ίσο με το μέγεθος του δείγματος) ως αρκετά μεγάλη τιμή. Επιπλέον για την παράμετρο σ^2 επιλέξαμε μικρές τιμές των με α, b ($a = b = 0.01$), ώστε να εξασφαλίσουμε μη πληροφοριακή κατανομή (μεγάλη διασπορά).

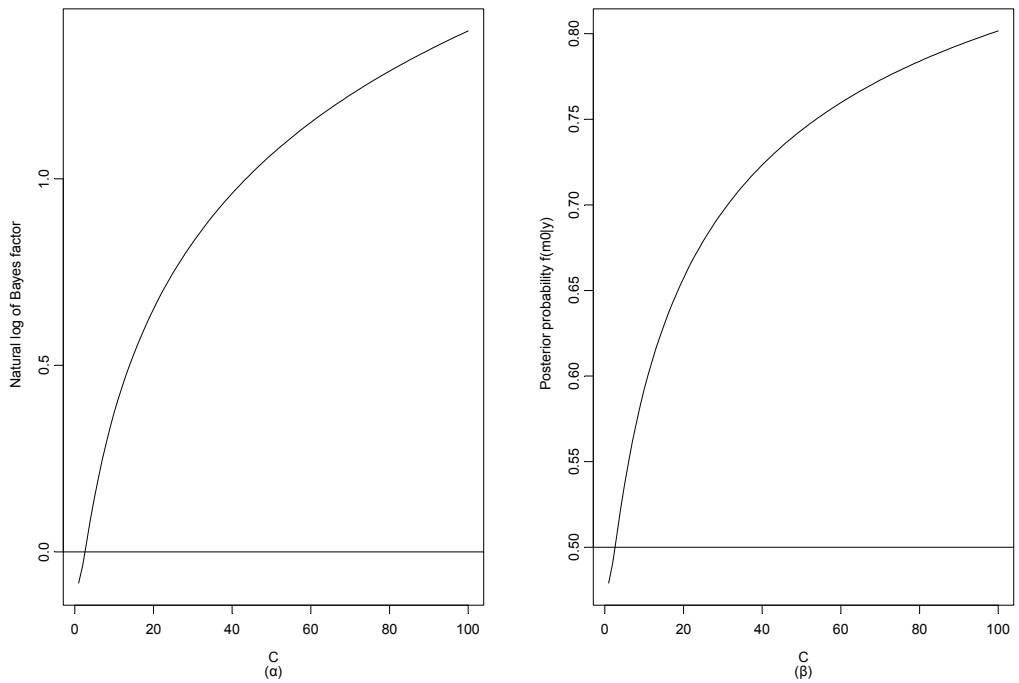
Στον πίνακα 3.2 (σελ. 54), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του παραπάνω ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν με την εφαρμογή της ρουτίνα bayesnormal.mean2 (βλ.

παράρτημα σελ. 152) στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = 1.28 > 1 (αντίστοιχα εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 0.56) *άρα υπάρχει μικρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης, η οποία δεν αξίζει παρά μια απλή αναφορά*.

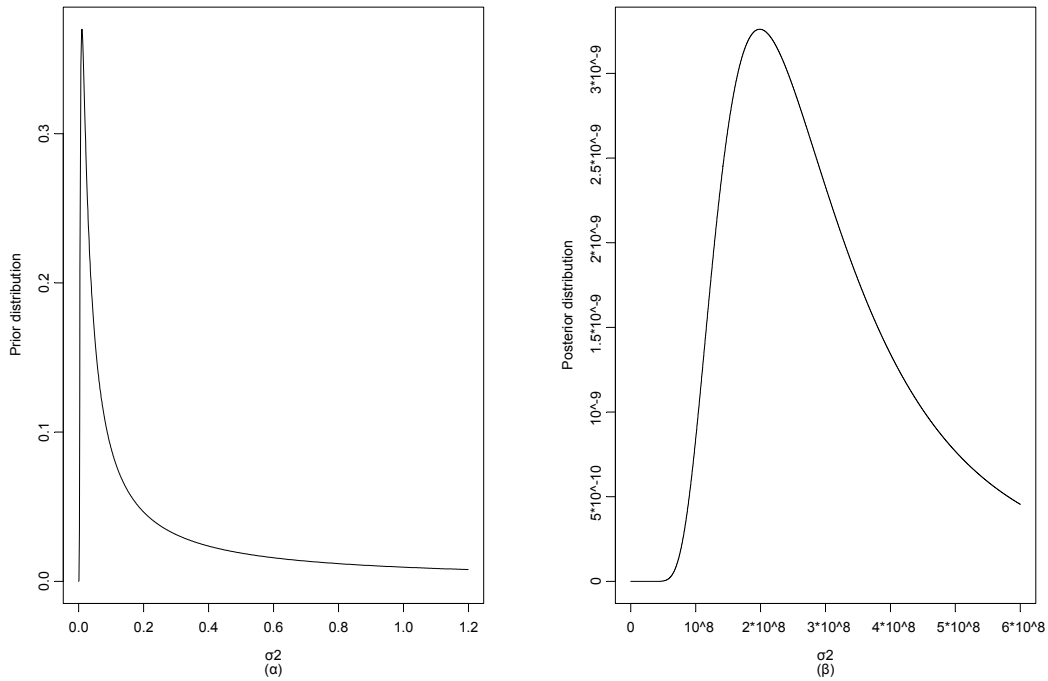
Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εξετάσουμε την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes για διαφορετικές τιμές του C, αυτό θα γίνει με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotbf2* (βλ. παράρτημα σελ. 154). Στο διάγραμμα 3.10, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του C από 1 ως 100 (δηλαδή από 1 έως $2n^2$) και για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: μ_0=10000. Το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-0.08 , 1.39) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.48 , 0.80). Παρατηρούμε ότι για τιμές του C από 1 έως 2, υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης, ενώ για τιμές του C μεγαλύτερες ή ίσες του 3 υποστηρίζεται το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης. Δηλαδή, όσο αυξάνονται οι τιμές του C (συνεπώς θεωρούμε μεγαλύτερη διασπορά της εκ των προτέρων κατανομής), ομοίως αυξάνονται οι τιμές του παράγοντα Bayes. Δεδομένου ότι επιδιώκουμε την επιλογή μη πληροφοριακών εκ των προτέρων κατανομών (μεγάλων τιμών του C), συμπεραίνουμε ότι τα άτομα που πάσχουν από κάποιες μορφές λευχαιμίας δεν εμφανίζουν τιμές λευκών αιμοσφαιρίων πέραν των φυσιολογικών.

Η εκ των υστέρων κατανομή που δίνεται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 3.3, σελ 54) για την παράμετρο σ^2 είναι η $\sigma^2 \,|\, \boldsymbol{y} \sim IG(3.51, 895470000)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [111629727 , 1053912120]. Στο διάγραμμα 3.11 εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας.

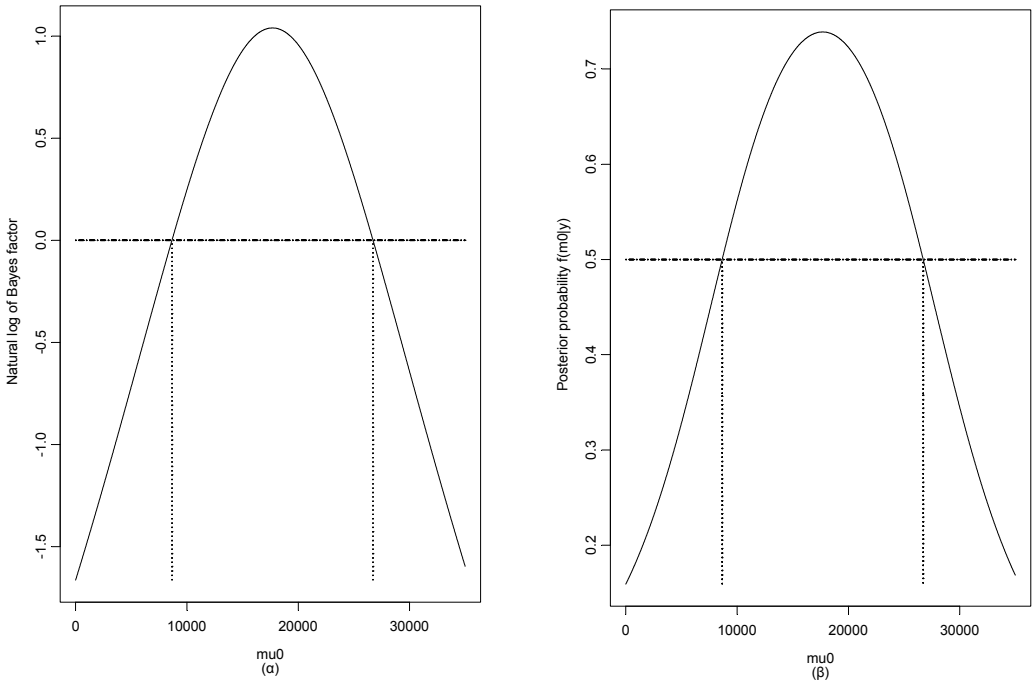
Στο διάγραμμα 3.12 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του μ_0 από 1 ως 35000, C=7 και $\underset{\sim}{m} = \mu_0$ για κάθε έλεγχο. Παρατηρούμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-1.66 , 1.04) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.16 , 0.74). Το διάστημα τιμών του μ_0 [8656 , 26716] είναι το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Δηλαδή εκείνο που αντιστοιχεί σε τιμές του λογάριθμου του παράγοντα Bayes μεγαλύτερες του μηδενός. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιήθηκε η ρουτίνα *plotm02* (βλ. παράρτημα σελ. 154).



Διάγραμμα 3.10: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1< C < 100).*



Διάγραμμα 3.11: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της α) εκ των προτέρων και β) της εκ των υστέρων κατανομής του μέσου*



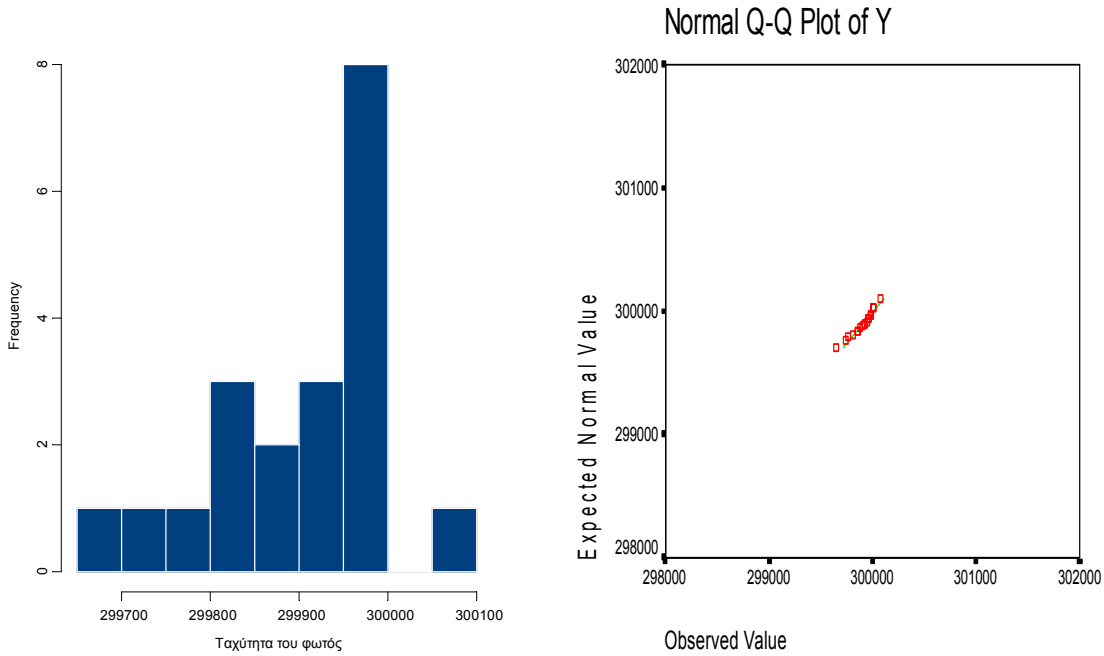
Διάγραμμα 3.12: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 για διαφορετικές υποθέσεις που αφορούν τον μέσο ($1<\mu_0<35000$).*

<u>Παράδειγμα 3.4</u>: Ταχύτητα φωτός

Το 1876, ο Γάλλος φυσικός Cornu υπολόγισε την ταχύτητα του φωτός ίση με 299990 km/sec. Τρία χρόνια αργότερα, το 1879 ο Αμερικανός φυσικός A.A.Michelson πραγματοποίησε μια σειρά πειραμάτων, προκειμένου να επιβεβαιώσει και να βελτιώσει την τιμή του Cornu (Mathsoft, 1997). Οι ακόλουθες 20 παρατηρήσεις προέρχονται από τα πειράματα του Michelson και θα εξετάσουμε κατά πόσο συμπίπτουν οι τιμές των δύο ερευνητών για την ταχύτητα του φωτός. Για να μετατρέψουμε τις τιμές σε km/sec αρκεί να προσθέσουμε σε κάθε μια από αυτές την τιμή 299000 km/sec.

850	740	900	1070	930	850	950	980	980	880
1000	980	930	650	760	810	1000	1000	960	960

Θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων του Michelson είναι ίση με την τιμή 299990 km/sec του Cornu. Στο διάγραμμα 3.13, παρουσιάζεται το ιστόγραμμα και το Normal Q-Q plot των παρατηρήσεων, από τα οποία θεωρούμε την κατανομή τους κανονική, $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Διάγραμμα 3.13: *Το ιστόγραμμα και το normal q-q plot των παρατηρήσεων του παραδείγματος 3.4*

Θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων του Michelson, 299909 km/sec, διαφέρει σημαντικά από την τιμή 299990 km/sec που εκτιμά ο Cornu.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu = 299990 \quad \text{έναντι της } \mathbf{H_1}: \ \mu \neq 299990$$

Τα αντίστοιχα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν οι παραπάνω υποθέσεις είναι:

$$m_0 : y_i \sim N\left(299990, \sigma^2\right) \text{ και } m_1 : y_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$$

Όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα για τις εκ των προτέρων κατανομές των παραμέτρων σ^2, μ, θεωρούμε μικρές τιμές των α, b, $\tilde{m}$ =299990 αφού πιστεύουμε ισχυρά ότι αυτή είναι η τιμή της μέσης τιμής και C=20 (ίσο με το μέγεθος του δείγματος) ως αρκετά μεγάλη τιμή, δηλαδή $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$ και $\mu \sim N\left(299990, \sigma^2\right)$.

Στον πίνακα 3.2, (σελ. 54) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του παραπάνω ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από την ρουτίνα *bayesnormal.mean2* (βλ. παράρτημα σελ. 152) στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\dfrac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 0.05 < 1, αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 0.05, άρα υπάρχει ισχυρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης, *η μέση τιμή της κατανομής διαφέρει από την τιμή 299990*. Επομένως, η τιμή με την οποία εκτιμά ο Michelson την ταχύτητα του φωτός διαφέρει σημαντικά από την τιμή 299990 km/sec που εκτιμά ο

Cornu. Οι εκ των υστέρων κατανομές για τις άγνωστες παραμέτρους που δίνονται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 3.3, σελ 54) είναι $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{20.02}\left(299912.9,\ 512.4\right)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [299865.6 , 299960.1] και $\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG(10.01,107714.3)$ με 95% διάστημα αξιοπιστίας [6299.8 , 22429.9].

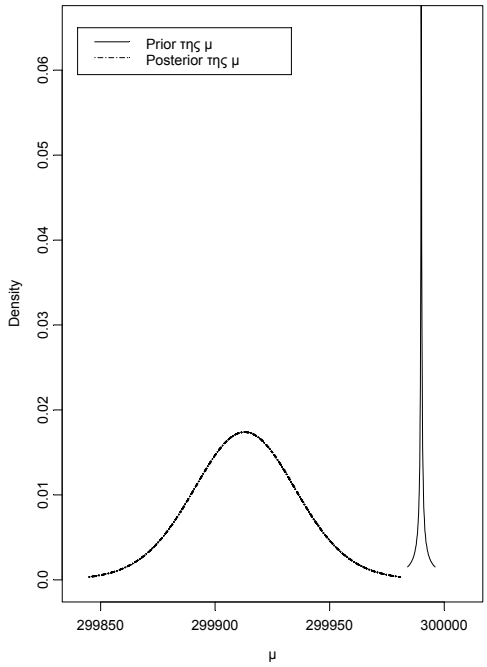
Η εκ των προτέρων κατανομή που επιλέξαμε για την παράμετρο μ είναι δεσμευμένη ως προς σ^2, $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, C\frac{\sigma^2}{n}\right)$. Αν ολοκληρώσουμε την από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των δύο παραμέτρων $f\left(\mu,\sigma^2\right)$ ως προς σ^2, καταλήγουμε στην εκ των προτέρων κατανομή της μ που είναι ανεξάρτητη του σ^2, δηλαδή καταλήγουμε στην κατανομή $\mu \sim t_{2a}\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n}\cdot\frac{b}{a}\right)$ σύμφωνα με την οποία η εκ των προτέρων κατανομή της μέσης τιμής (που είναι ανεξάρτητη της διασποράς σ^2) ακολουθεί την Student-t κατανομή με 2α βαθμούς ελευθερίας μέση τιμή $\underset{\sim}{m}$ και διασπορά $\frac{C}{n}\cdot\frac{b}{a}$.

Στο διάγραμμα 3.14 παρουσιάζεται η πυκνότητα πιθανότητας της εκ των προτέρων $\mu \sim t_{0.02}\left(299990,1\right)$ (θέτουμε όπου $\underset{\sim}{m}$=299990, C=20, α=b=0.01) και της εκ των υστέρων κατανομής της μ, $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{20.02}\left(299912.9,\ 512.4\right)$. Εναλλακτικά, παρουσιάζουμε το διάγραμμα 3.15, όπου φαίνεται το γράφημα της από κοινού εκ των προτέρων κατανομής των παραμέτρων μ και σ^2. Στο διάγραμμα 3.16, εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας για την παράμετρο σ^2, αντίστοιχα.

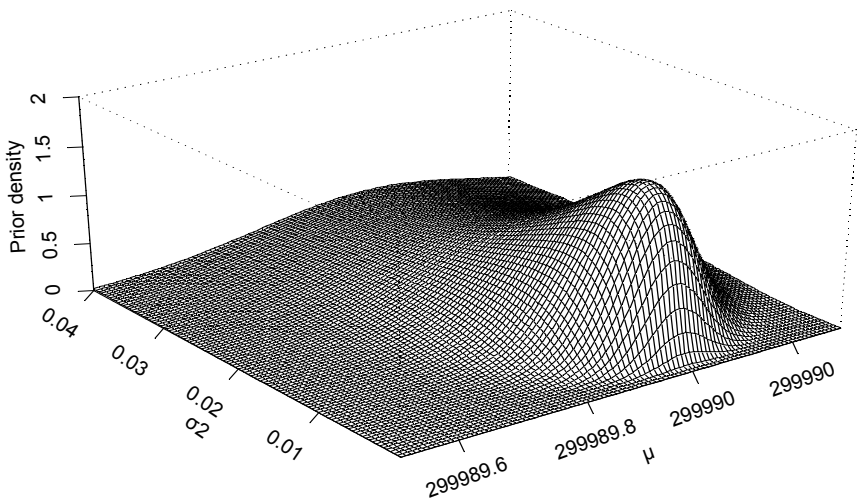
Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes όταν το C παίρνει τιμές πολύ μικρότερες ή πολύ μεγαλύτερες από το μέγεθος του δείγματος ή ισοδύναμα όταν επιλέγουμε πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη εκ των προτέρων διασπορά, θα χρησιμοποιήσουμε τη ρουτίνα *plotbf2* (βλ. παράρτημα σελ. 154). Στο διάγραμμα 3.17, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του λογάριθμου του παράγοντα Bayes για τιμές του C από 1 ως 400 (δηλαδή από 1 έως n^2) για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: μ_0=299990. Παρατηρούμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-3.12 , -1.79). Ο λογάριθμος είναι μικρότερος του μηδενός, οπότε υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C. Παρατηρούμε ότι όσο το η τιμή

της σταθεράς C αυξάνεται, υποστηρίζεται πιο ισχυρά το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης.

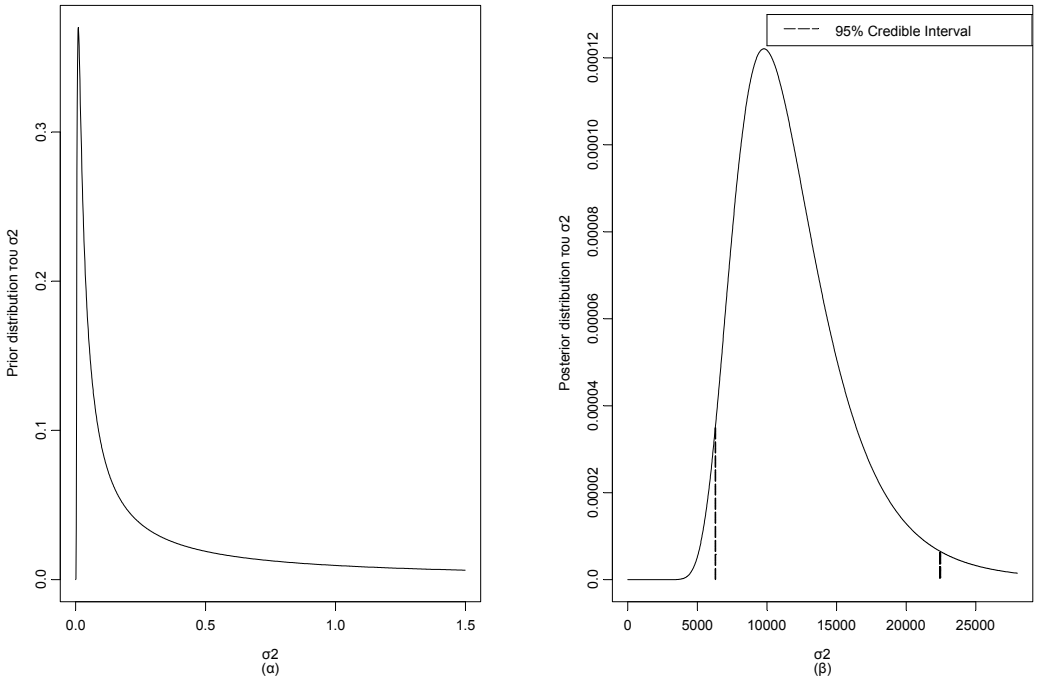
Στο διάγραμμα 3.18 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του μ_0 από 299700 ως 300100 και C=20. Παρατηρούμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-13.12 , 1.52) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0 , 0.82). Το διάστημα τιμών του μ_0 [299867 , 299951] είναι το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή εκείνο που αντιστοιχεί σε θετικές τιμές του λογάριθμου. Για την κατασκευή των γραφημάτων χρησιμοποιήθηκε η ρουτίνα *plotm02* (βλ. παράρτημα σελ. 154).



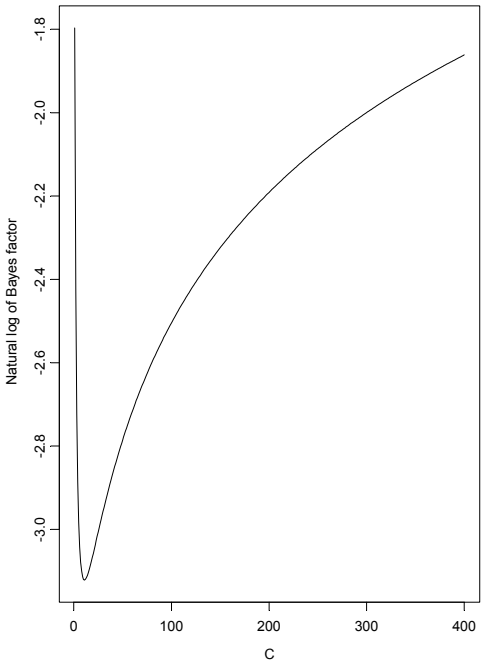
Διάγραμμα 3.14: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής του μέσου μ*



Διάγραμμα 3.15: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των παραμέτρων μ, σ^2.*

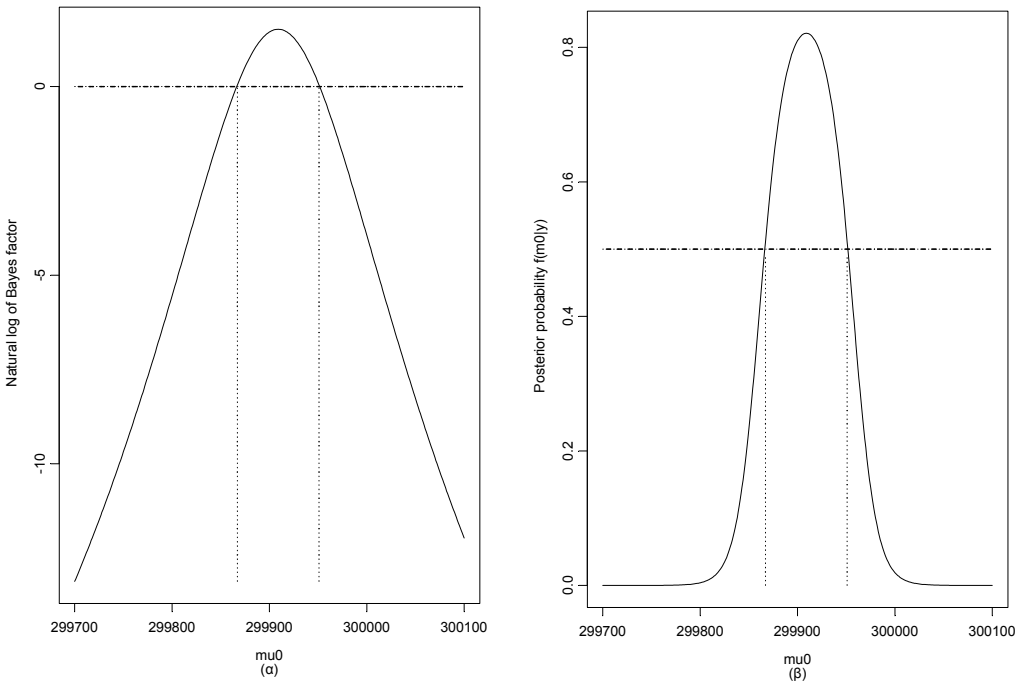


Διάγραμμα 3.16: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της α) εκ των προτέρων και β) της εκ των υστέρων κατανομής της διασποράς σ^2.*



Διάγραμμα 3.17: *Διάγραμμα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του log-BF σε σχέση με τη σταθερά C (1 <C < 400).*

.



Διάγραμμα 3.18: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 για διαφορετικές υποθέσεις που αφορούν τον μέσο (299700<μ< 300100).*

Παράδειγμα 3.5: *Μετρήσεις γλυκόζης*

Σε μια έρευνα μετρήθηκαν οι τιμές της γλυκόζης του αίματος 36 ατόμων που έπασχαν από μια νόσο. Βρέθηκε ότι η μέση τιμή της γλυκόζης για αυτή την ομάδα ασθενών είναι 1.3 gr/l και η σταθερή απόκλιση 0.3 gr/l. Σκοπός της έρευνας είναι να ελεγχθεί αν η μέση τιμή της γλυκόζης των ασθενών διαφέρει από τη φυσιολογική τιμή γλυκόζης του αίματος 1.1 gr/l (Τζώνου και Κατσουγιάννη, 1997). Θεωρούμε την κατανομή των παρατηρήσεων κανονική, $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu = 1.1 \ \text{ έναντι της } \mathbf{H_1}: \ \mu \neq 1.1$$

Τα αντίστοιχα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν οι παραπάνω υποθέσεις είναι:

$$m_0 : y_i \sim N\left(1.1, \sigma^2\right) \text{ και } m_1 : y_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$$

Όμοια με το παράδειγμα 3.3, για την εκ των προτέρων κατανομή της διασποράς θεωρούμε την αντίστροφη Γάμμα κατανομή με μικρές τιμές των παραμέτρων α, b ($a = b = 0.01$), δηλαδή $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$. Για την παράμετρο της μέσης τιμής μ επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή $\mu \sim N\left(1.1, \sigma^2\right)$, δηλαδή $\underset{\sim}{m}$ =1.1 αφού έχουμε ισχυρές πεποιθήσεις ότι αυτή είναι η τιμή της εκ των προτέρων μέσης τιμής και για τη σταθερά C θεωρούμε ως αρκετά μεγάλη τιμή αυτή του μεγέθους του δείγματος, C=n=36.

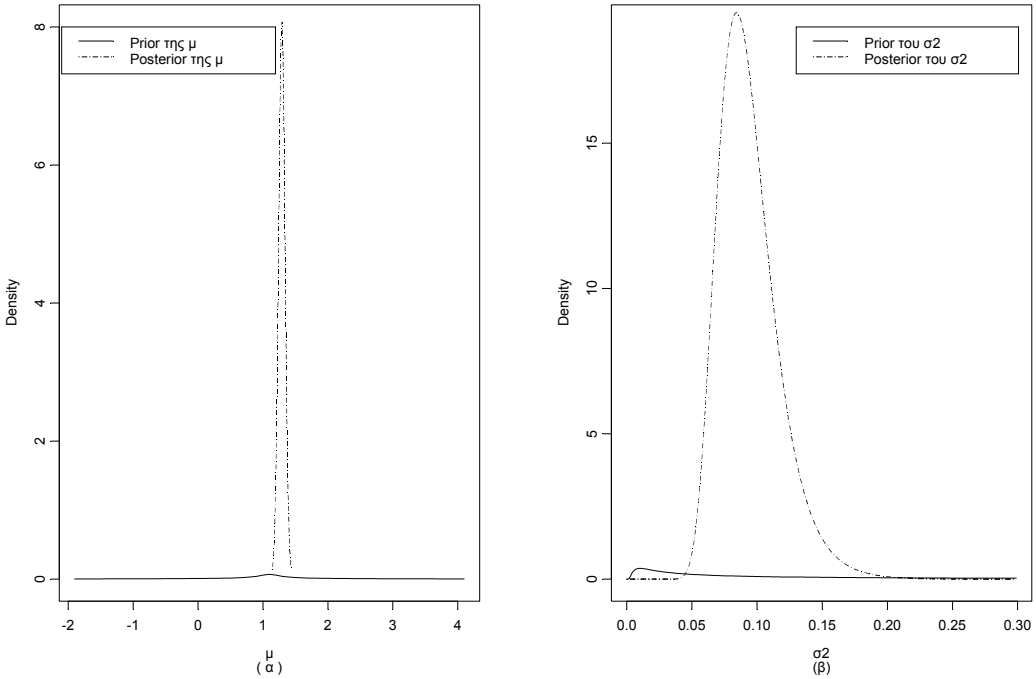
Στον πίνακα 3.2, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του παραπάνω ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από την ρουτίνα *bayesnormal.mean2* (βλ. παράρτημα σελ. 152) στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\dfrac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 0.009 < 1, άρα υπάρχει ισχυρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης, *η μέση τιμή της κατανομής διαφέρει από τη φυσιολογική τιμή 1.1 gr/l*. Οι εκ των υστέρων κατανομές που δίνονται από το θεώρημα του Bayes για τις άγνωστες παραμέτρους (βλ. πίνακα 3.3, σελ 54) είναι $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{36.02}\left(1.29,\ 0.0024\right)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [1.19 , 1.39] και $\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG(18.01, 1.6)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [0.06 , 0.15].

Για να παραστήσουμε γραφικά την εκ των προτέρων κατανομή της μέσης τιμής θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή $\mu \sim t_{2a}\left(\underset{\sim}{m}, \dfrac{C}{n} \cdot \dfrac{b}{a}\right)$ που υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα (διαφέρει στο γεγονός ότι η κατανομή αυτή είναι

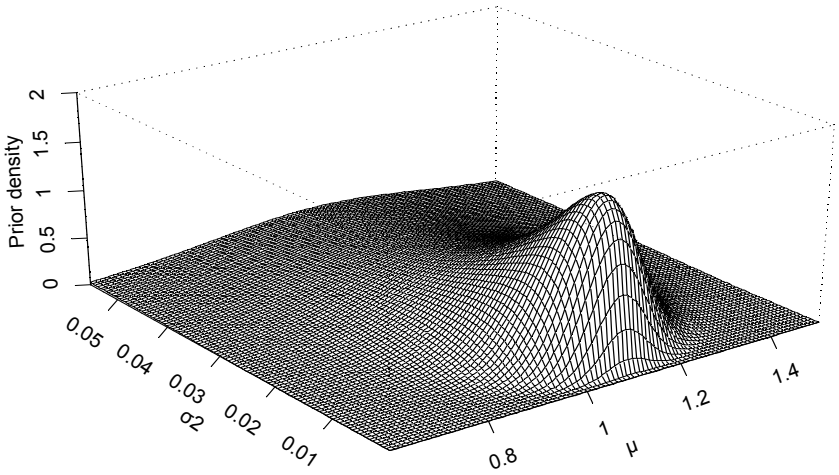
ανεξάρτητη της διασποράς). Στο γράφημα 3.19, βλέπουμε το γράφημα της εκ των προτέρων $\mu \sim t_{0.02}(1.1,1)$ (όπου $\underset{\sim}{m}$=1.1, C=36, α=b=0.01) και εκ των υστέρων $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{36.02}(1.29,\ 0.0024)$ κατανομής της μ, αντιστοίχως. Εναλλακτικά, παρουσιάζουμε το διάγραμμα 3.19, όπου φαίνεται το γράφημα της από κοινού εκ των προτέρων κατανομής των παραμέτρων μ και σ^2. Στο διάγραμμα 3.20, εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας για την παράμετρο σ^2.

Επιπλέον εξετάσαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes σε σχέση με τις τιμές της σταθεράς C ή με άλλα λόγια σε σχέση με την εκ των προτέρων διασπορά που επιλέξαμε, αυτό θα γίνει με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf2* (βλ. παράρτημα σελ. 154). Στο διάγραμμα 3.21, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του C από 1 ως 1300 (δηλαδή από 1 έως n^2) και για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: μ_0=1.1. Παρατηρούμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-4.85 , -2.71) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.008 , 0.062). Ο λογάριθμος είναι μικρότερος του μηδενός (αντίστοιχα, η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 μικρότερη του 0.5), οπότε υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που εξετάσαμε.

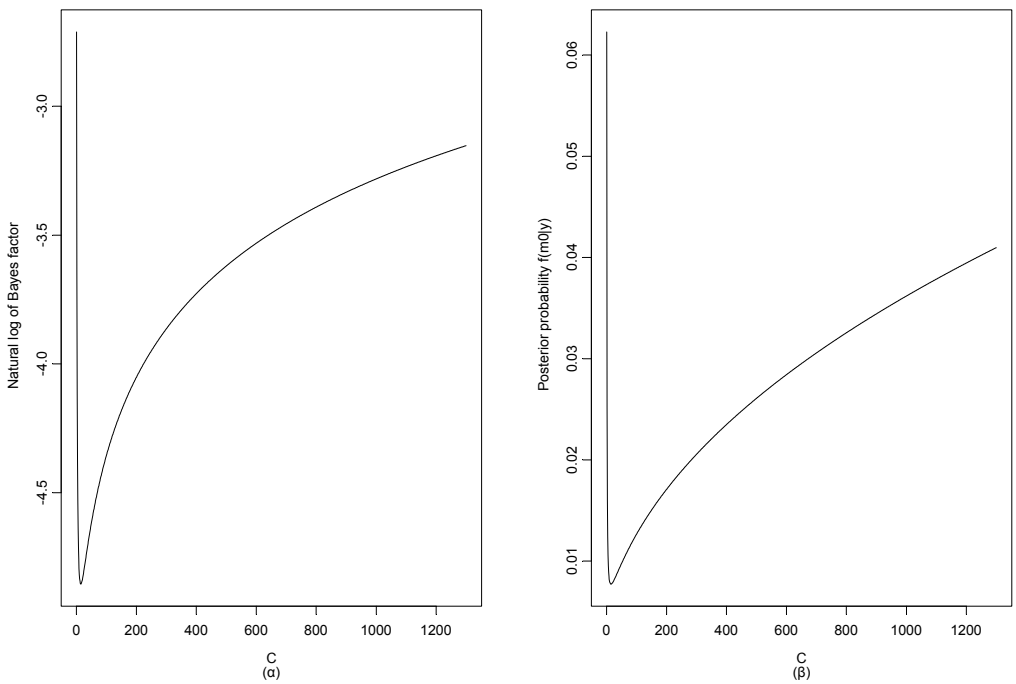
Στο διάγραμμα 3.22 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του μ_0 από 1 ως 1.6 και C=36. Παρατηρούμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-10.38 , 1.81) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0,0.86). Το διάστημα που αντιστοιχεί στις θετικές τιμές του λογάριθμου, είναι το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης και είναι το [1.21 , 1.39], (εφαρμογή της ρουτίνας *plotm02*, βλ. παράρτημα σελ. 154)



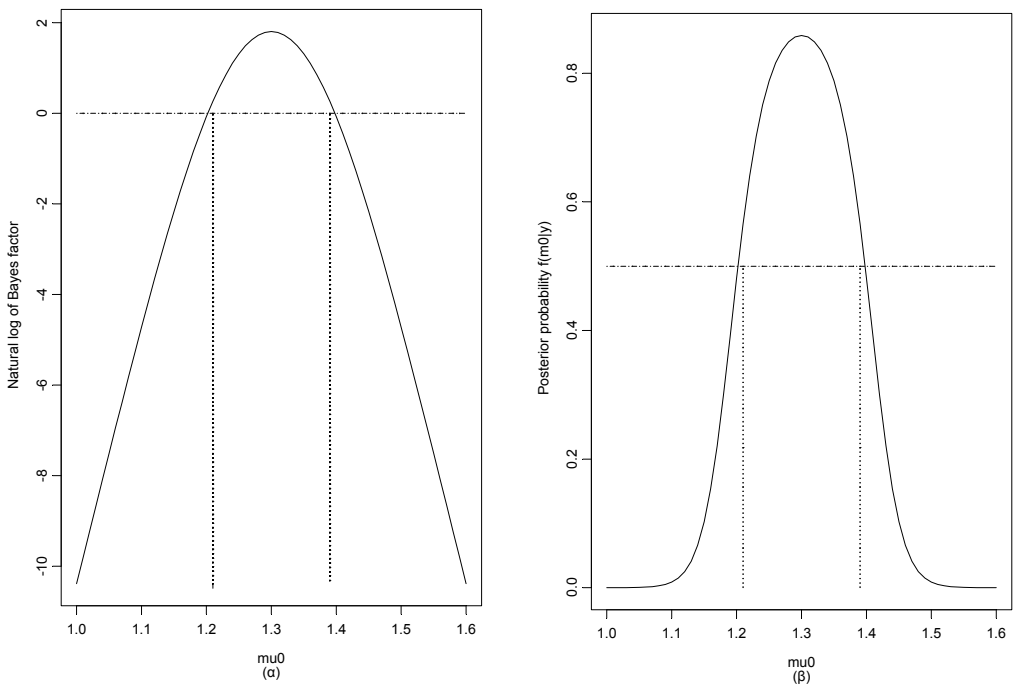
Διάγραμμα 3.19: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου μ και β) της διασποράς* σ^2



Διάγραμμα 3.20: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των παραμέτρων μ,* σ^2.



Διάγραμμα 3.21: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1< C < 1300).*



Διάγραμμα 3.22: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 για διαφορετικές υποθέσεις που αφορούν τον μέσο (1<μ<1.6).*

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	H_0
Παρ. 3.3	1.28	0.25	0.78	0.562	Μικρή	
Παρ. 3.4	0.05	-3.06	21.27	0.045		Ισχυρή
Παρ. 3.5	0.009	-4.72	112.11	0.009		Ισχυρή

Πίνακας 3.2: *Συνοπτικός πίνακας εκ των υστέρων ανάλυσης για τα παρ. 3.3- 3.5*
BF: Παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του m_0 έναντι του m_1, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, 1/BF: Παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του m_1 έναντι του m_0, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου, μικρή: ένδειξη που δεν αξίζει παρά μια αναφορά

	μ		$\sigma^2\|m_0$		$\sigma^2\|m_1$	
	$\tilde{m}$	σ'	α'	b'	α'	b'
Παρ. 3.3	16725	5044.5	3.51	895470000	3.51	714567500
Παρ. 3.4	299912.9	22.64	10.1	170200	10.01	107714.3
Παρ. 3.5	1.29	0.049	18.01	2.3	18.01	1.6

Πίνακας 3.3: *Εκτιμήσεις των παραμέτρων των παρ. 3.3 - 3.5*
$\tilde{m}$, σ' εκ των υστέρων μέσος και σταθερή απόκλιση της παραμέτρου μ,
α', b': παράμετροι της εκ των υστέρων γάμμα κατανομής της παραμέτρου $\tau=1/\sigma^2$.

3.2 Έλεγχοι υποθέσεων για δύο συσχετιζόμενους πληθυσμούς.

3.1.3 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο εξαρτημένων δειγμάτων κανονικής κατανομής με γνωστές διασπορές.

Μερικές φορές, κατά τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών, οι δύο ομάδες παρατηρήσεων παρουσιάζουν ατομική αντιστοιχία και οι συγκρίσεις μπορούν να γίνονται ανά ζεύγη (paired comparisons). Για παράδειγμα, στην περίπτωση που συγκρίνεται η αποτελεσματικότητα δύο αναλγητικών, είναι προτιμότερο οι παρατηρήσεις να γίνονται στους ίδιους ασθενείς, σε διαφορετικό χρόνο, και έτσι να εξετάζεται η διαφορά αποτελεσματικότητας των φαρμάκων στον ίδιο ασθενή. Για τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών $y_{11},...,y_{1n}$ και $y_{21},...,y_{2n}$ που

συσχετίζονται μεταξύ τους, θα υπολογίσουμε τις διαφορές των παρατηρήσεων y_{1i} και y_{2i} => $d_i = y_{1i} - y_{2i}$ και έτσι το πρόβλημα ανάγετε σε πρόβλημα ενός πληθυσμού, πλήθους n.

Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις d_i ακολουθούν κανονική κατανομή $d_i \sim N\left(\mu_d, \sigma^2\right)$, οπότε θα γίνει ο έλεγχος της ισότητας της μέσης τιμής του δείγματος με την τιμή του μηδενός.

$$H_0 : \mu_d = 0 \text{ έναντι της } H_1 : \mu_d \neq 0. \tag{3.7}$$

Τα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν τις παραπάνω υποθέσεις καθώς και οι αντίστοιχες συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τους τύπους 3.2, 3.3 και 3.4 της ενότητας 3.1.1 για $\mu_0 = 0$. Για την εκ των προτέρων κατανομή της παραμέτρου μ_d επιλέγουμε την κανονική κατανομή, ομοίως με την ενότητα 3.1.1 (βλ σελ. 1), $\mu_d \sim N\left(\underset{\sim}{m}, C\frac{\sigma^2}{n}\right)$ και υπολογίζεται η εκ των υστέρων πληροφορία για την παράμετρο, $\mu_d \mid \boldsymbol{d} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m} + \bar{d}C}{1+C}, \frac{C\sigma^2}{n\left(1+C\right)}\right)$. Ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας της παραμέτρου μ_d είναι το $\frac{\underset{\sim}{m} + \bar{d}C}{1+C} \pm z_{q/2}\sqrt{\frac{C\sigma^2}{n\left(1+C\right)}}$.

<u>*Παράγοντας Bayes:*</u>

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του μοντέλου m_0 έναντι του m_1

$$\frac{f\left(\boldsymbol{d} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{d} \mid m_1\right)} = \sqrt{1+C}\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\bar{d}^2 - \frac{1}{1+C}\left(\bar{d} - \underset{\sim}{m}\right)^2\right)\right\} \tag{3.8}$$

Ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από

- το τετράγωνο του δειγματικού μέσου και
- την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας από τον μέσο της εκ των προτέρων κατανομής.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει για την ανάλυσή μας, καθώς και από την τιμή της σταθεράς C, δηλαδή τη διασπορά που επιλέξαμε για την εκ των προτέρων κατανομή.

Διερευνώντας τις τιμές του παράγοντα Bayes σε σχέση με τις τιμές τις σταθεράς C, παρατηρούμε ότι ισχύει ότι και στο προηγούμενο παράδειγμα. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μεγάλη τιμή για το C δηλαδή μεγάλη διασπορά για την εκ των προτέρων κατανομή, συνεπάγεται αύξηση στην τιμή του παράγοντα Bayes, δηλαδή υποστηρίζεται το μοντέλο της μηδενικής υπόθεση πιο ισχυρά, (Παράδοξο του Lindley, 1957).

Όμοια, όταν η τιμή του C γίνει πολύ μικρή ($C \to 0$), δηλαδή θεωρούμε πολύ μικρή εκ των προτέρων διασπορά, ο παράγοντας Bayes παίρνει την τιμή

$$\text{BF} = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\bar{d}^2 - \left(\bar{d} - \underset{\sim}{m}\right)^2\right)\right\}$$

Τότε, η ένδειξη που θα έχουμε υπέρ κάποιου μοντέλο δε θα είναι άξια αναφοράς και αυτό γιατί τα συγκρινόμενα μοντέλα γίνονται ίδια.

3.1.4 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο εξαρτημένων δειγμάτων κανονικής κατανομής με άγνωστες διασπορές.

Έστω, δύο πληθυσμοί $y_1,...,y_{n_1}$ και $y_1,...,y_{n_2}$ που συσχετίζονται μεταξύ τους και οι διασπορές τους είναι άγνωστες. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις $d_i = y_{1i} - y_{2i}$ ακολουθούν κανονική κατανομή $d_i \sim N\left(\mu_d, \sigma^2\right)$. Θα γίνει ο έλεγχος της ισότητας της μέσης τιμής των παρατηρήσεων d_i με τη τιμή μηδέν. Ο έλεγχος υποθέσεων είναι ανάλογος με αυτόν της ενότητας 3.1.2, καθώς και οι τύποι που χρησιμοποιούνται αντίστοιχοι για $\mu_0=0$.

Στο μοντέλο m_0, για την παράμετρο σ^2 επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή $\sigma^2 \sim IG(a,b)$ δηλαδή αντίστροφη γάμμα κατανομή με παραμέτρους α, b ή ισοδύναμα γάμμα κατανομή με μέσο α/b (δηλ. τ~G(α,b)) για την παράμετρο της ακρίβειας $\tau = \sigma^{-2}$. Η εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου υπολογίζεται:

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{d}, m_0 \sim IG\left(a+\frac{n}{2}, \frac{\sum d_i^2}{2}+b\right)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε $f\left(\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}, m_0\right) \sim IG\left(a', b'\right)$, όπου $a' = a + \frac{n}{2}$ και $b' = \frac{\sum d_i^2}{2} + b$. Ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας για την παράμετρο σ^2, είναι το διάστημα $P\left(k_1 \le \sigma^2 \le k_2\right) = 1-q$, όπου για τα k_1, k_2 ισχύουν $Gamma_{1/k_1}\left(a', b'\right) = 1 - \frac{q}{2}$ και $Gamma_{1/k_2}\left(a', b'\right) = \frac{q}{2}$.

Στο μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης, για τις άγνωστες παραμέτρους μ, σ^2, επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_d \sim N\left(\underset{\sim}{m}, C\frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\sigma^2 \sim IG(a,b)$ και υπολογίζονται οι εκ των υστέρων κατανομές:

$$\mu_d \mid \boldsymbol{d}, m_1 \sim t_{2a+n}\left(\frac{\underset{\sim}{m}+\bar{d}C}{1+C}, \frac{C\left(\sum\left(d_i-\bar{d}\right)^2+\frac{n}{1+C}\left(\bar{d}-\underset{\sim}{m}\right)^2+2b\right)}{n\left(1+C\right)\left(2a+n\right)}\right)$$

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{d}, m_1 \sim IG\left(\alpha+\frac{n}{2}, \frac{\sum\left(d_i-\bar{d}\right)^2+\frac{n}{1+C}\left(\bar{d}-\underset{\sim}{m}\right)^2+2b}{2}\right)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε $\mu_d \mid \boldsymbol{d}, m_1 \sim t_{2a+n}\left(\tilde{m}, \sigma'^2\right)$, όπου $\tilde{m} = \frac{\underset{\sim}{m}+\bar{d}C}{1+C}$, $\sigma'^2 = \frac{C\left(\sum\left(d_i-\bar{d}\right)^2+\frac{n}{1+C}\left(\bar{d}-\underset{\sim}{m}\right)^2+2b\right)}{n\left(1+C\right)\left(2a+n\right)}$, δηλαδή η εκ των υστέρων κατανομή της μ ακολουθεί την Student-t κατανομή με $2a+n$ βαθμούς ελευθερίας, μέση τιμή $\tilde{m}$ και διασπορά σ'^2. Επίσης, γράφουμε $\sigma^2 \mid \boldsymbol{d}, m_1 \sim IG\left(a', b'\right)$ όπου $a' = a + \frac{n}{2}$ και $b' = \frac{\sum\left(d_i-\bar{d}\right)^2+\frac{n}{1+C}\left(\bar{d}-\underset{\sim}{m}\right)^2}{2} + b$. Ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας για την παράμετρο μ_d είναι το $\tilde{m} \pm t_{2a+n,q/2}\sigma'$ και για την παράμετρο σ^2 το $P\left(k_1 \le \sigma^2 \le k_2\right) = 1-q$, όπου $Gamma_{1/k_1}\left(a', b'\right) = 1 - \frac{q}{2}$ και $Gamma_{1/k_2}\left(a', b'\right) = \frac{q}{2}$.

Παράγοντας Bayes:

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του μοντέλου m_0 έναντι του m_1:

$$\frac{f(\boldsymbol{d} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{d} \mid m_1)} = \sqrt{1+C}\left[\frac{b+\frac{n}{2}\left(\frac{\sum\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n}+\frac{\left(\bar{d}-\underset{\sim}{m}\right)^2}{1+C}\right)}{b+\frac{\sum d_i^2}{2}}\right]^{a+n/2} \tag{3.9}$$

Ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από:

- τη μέση τετραγωνική απόσταση της διαφοράς των δεδομένων ***d*** από τον δειγματικό μέσο
- την αντίστοιχη απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας από τον μέσο της εκ των προτέρων κατανομής και
- το τετράγωνο της διαφοράς των δεδομένων.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει για την ανάλυση μας, καθώς και από την τιμή της σταθεράς C, δηλαδή τη διασπορά που επιλέξαμε για την εκ των προτέρων κατανομή της μέσης τιμής. Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μεγάλο τότε η τιμή του παράγοντα Bayes παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, δηλαδή τείνει ασυμπτωτικά (όταν $n \to \infty$) στο άπειρο, παράδοξο του Lindley (Lindley, 1957).Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μεγάλη τιμή για το C, δηλαδή μεγάλη διασπορά για την εκ των προτέρων κατανομή, τότε αυξάνεται η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης, (όταν $C \to \infty \Rightarrow BF \to \infty$), (Bartlett, 1957)

Όταν η σταθερά C παίρνει πολύ μικρές τιμές ($C \to 0$) δηλαδή θεωρούμε σχεδόν μηδενική την εκ των προτέρων διασπορά της παραμέτρου μ, ο παράγοντας Bayes τείνει προς μια σταθερή τιμή.

$$\mathrm{BF} = \left[\frac{2b+\sum\left(d_i-\underset{\sim}{m}\right)^2}{2b+\sum d_i^2}\right]^{a+n/2}$$

Παράδειγμα 3.6: *Αποτελεσματικότητα δυο ειδών ασπιρίνης*

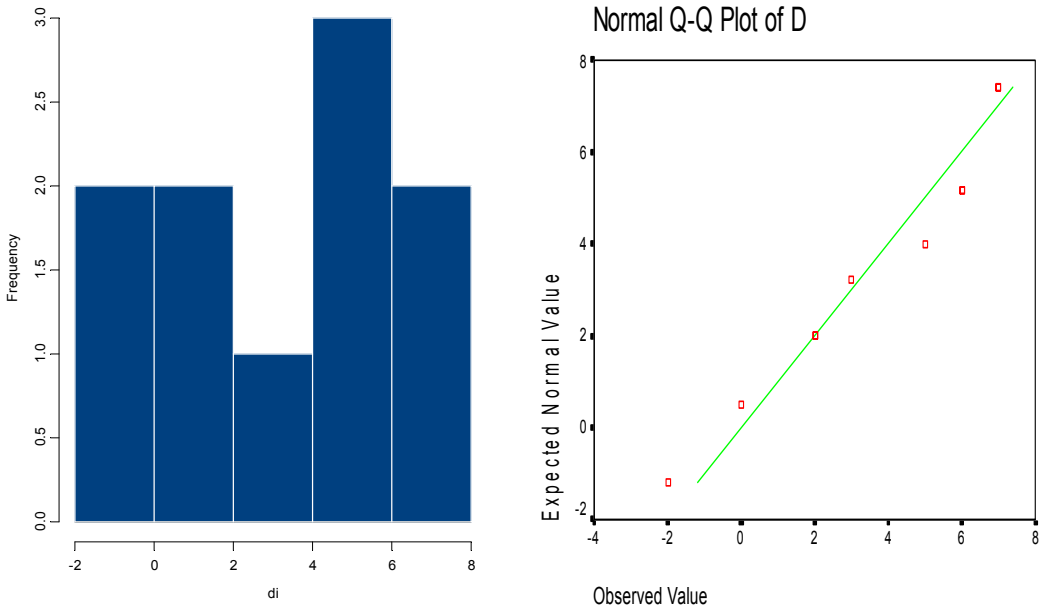
Μια έρευνα διεξήχθη για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας δύο διαφορετικών τύπων ασπιρίνης (A και B). Σε μια ομάδα ασθενών, χορηγήθηκε ο ένας τύπος ασπιρίνης και μια εβδομάδα αργότερα, όπου η πρώτη ασπιρίνη έχει πιθανώς αποβληθεί από τον οργανισμό, χορηγείται η ίδια δόση της άλλης ασπιρίνης. Μια ώρα μετά τη λήψη της κάθε ασπιρίνης μετριέται η συγκέντρωση των ούρων. Επειδή η σειρά με την οποία λαμβάνονται τα φάρμακα, μπορεί να επηρεάζουν τα αποτελέσματα, αποφασίστηκε τυχαία ποιος τύπος ασπιρίνης θα ληφθεί πρώτος. Τα πειραματικά αποτελέσματα μετά την εφαρμογή σε 10 άτομα δίνονται στον πίνακα 3.4, (Rosner, 1995).

Person	***Aspirin A 1-hour concentration (mg%)***	***Aspirin B 1-hour concentration (mg%)***
1	15	13
2	26	20
3	13	10
4	28	21
5	17	17
6	20	22
7	7	5
8	36	30
9	12	7
10	18	11

Πίνακας 3.4: *Συγκεντρώσεις ασπιρίνης σε δείγματα ούρων*

Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μέσες τιμές των συγκεντρώσεων διαφέρουν μετά τη λήψη της ασπιρίνης A σε σχέση με την ασπιρίνη B. Οι δύο ομάδες παρατηρήσεων, αναφέρονται στις ίδιες δειγματικές μονάδες θα εφαρμοστεί το αντίστοιχο κατά ζεύγη τεστ της Μπεϋζιανής συμπερασματολογίας. Στο διάγραμμα 3.23, εμφανίζεται το ιστόγραμμα και το q-q plot της διαφοράς d των παρατηρήσεων των δύο ομάδων. Από το q-q plot θεωρούμε κανονική την κατανομή των διαφορών $d_i \sim N\left(\mu_d, \sigma^2\right)$. Θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή της διαφοράς των παρατηρήσεων διαφέρει από το μηδέν.

Τα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν τον παραπάνω έλεγχο υποθέσεων δίνονται από τον τύπο 3.7. Για την παράμετρο μ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή $\mu \sim N\left(0,\sigma^2\right)$, ενώ για την παράμετρο της διασποράς επιλέγουμε την $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$ και για τα δύο μοντέλα. Για την εκ των προτέρων μέση τιμή επιλέξαμε $\tilde{m}$ =0 αφού έχουμε ισχυρές πεποιθήσεις ότι αυτή είναι η τιμή της μέσης τιμής της διαφοράς των παρατηρήσεων H_0: μ=0 και C=10 (ίσο με το μέγεθος του δείγματος) ως αρκετά μεγάλη τιμή. Επιπλέον για την παράμετρο σ^2 επιλέξαμε μικρές τιμές των με α, b ($a = b = 0.01$), ώστε να εξασφαλίσουμε μη πληροφοριακή κατανομή (μεγάλη διασπορά).



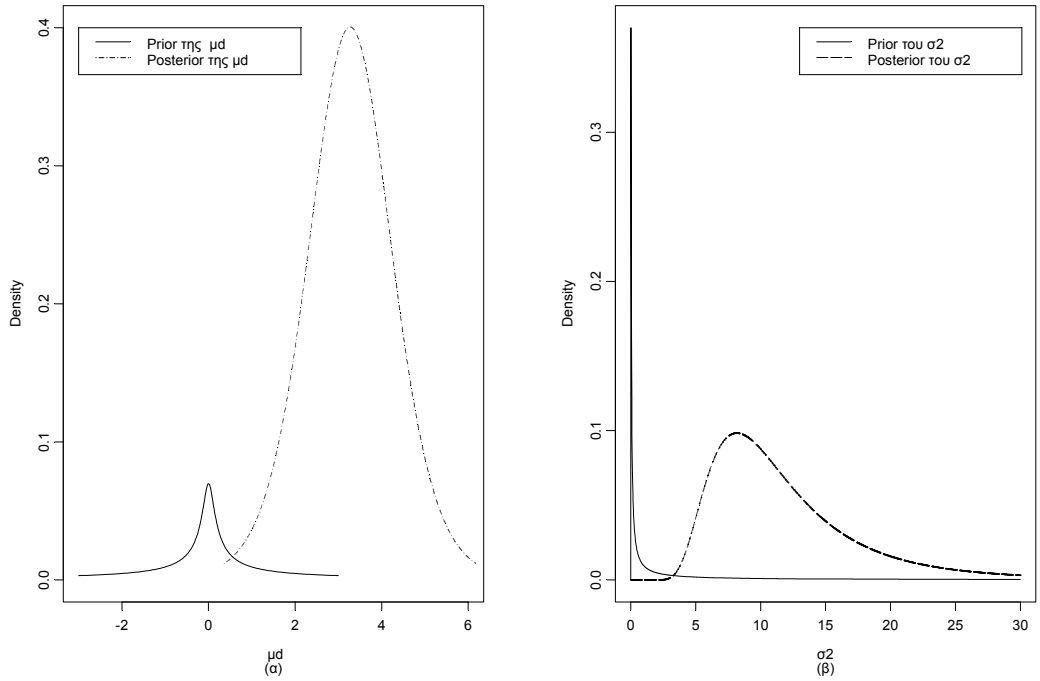
Διάγραμμα 3.23: *Το ιστόγραμμα και το Normal Q-Q plot της διαφοράς των παρατηρήσεων του παρ. 3.6.*

Τα αποτελέσματα του ελέγχου, παρουσιάζονται στον πίνακα 3.7 όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.pairedtest2* (βλ. παράρτημα σελ. 157) στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι $\frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 0.06 < 1 (αντίστοιχη εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 0.06) άρα υπάρχει θετική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης m_1. *Άρα οι μέσες τιμές των συγκεντρώσεων των ασθενών μετά τη λήψη της ασπιρίνης Α, διαφέρουν από τις τιμές που παρατηρήθηκαν μετά τη λήψη της ασπιρίνης Β*. Οι εκ των υστέρων κατανομές που δίνονται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 3.8) είναι $\mu_d \mid \boldsymbol{d} \sim t_{10.02}\left(3.27,\ 0.944\right)$, με 95%

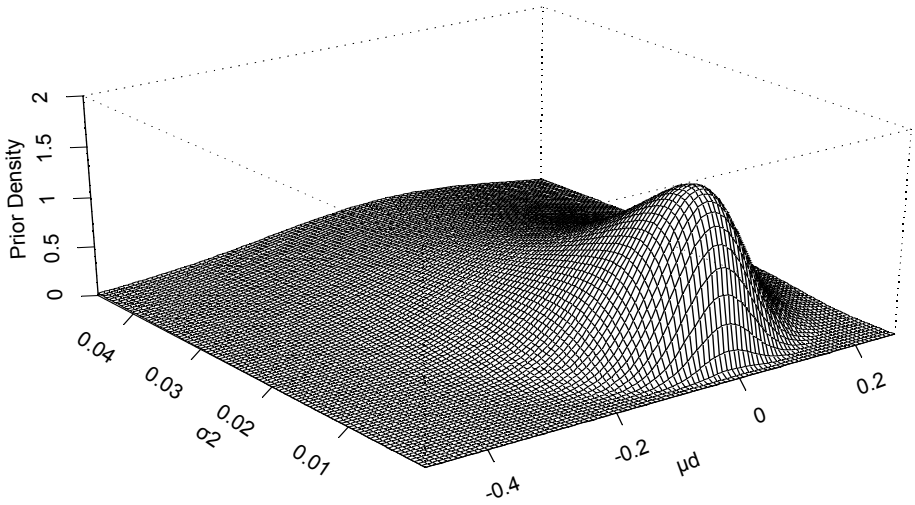
διάστημα αξιοπιστίας [1.17 , 5.37] και $\sigma^2 \mid \boldsymbol{d} \sim IG(5.01, 49.1)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [4.79 , 30.14].

Δεδομένου ότι η εκ των προτέρων κατανομή που επιλέξαμε για την παράμετρο μ_d είναι δεσμευμένη ως προς την άγνωστη παράμετρο σ^2, είναι προτιμότερο για τη γραφική της παράσταση να υπολογιστεί η αντίστοιχη κατανομή που είναι ανεξάρτητη της διασποράς. Ολοκληρώνοντας την από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των δύο παραμέτρων $f\left(\mu_d, \sigma^2\right)$ ως προς σ^2, καταλήγουμε στην εκ των προτέρων κατανομή της μ, $\mu_d \sim t_{2a}\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n} \cdot \frac{b}{a}\right)$. Στο γράφημα 3.24.α, παρουσιάζονται τα γραφήματα της εκ των προτέρων $\mu_d \sim t_{0.02}\left(0,1\right)$ (θέτουμε $\underset{\sim}{m}$=0, C=n=10, α=b=0.01) και εκ των υστέρων $\mu_d \mid \boldsymbol{d} \sim t_{10.02}\left(3.27,\ 0.944\right)$ κατανομής της μ_d και στο 3.25.β, τα αντίστοιχα γραφήματα για την παράμετρο σ^2. Εναλλακτικά, παρουσιάζουμε το διάγραμμα 3.25, όπου φαίνεται το γράφημα της από κοινού εκ των προτέρων κατανομής των παραμέτρων μ_d και σ^2.

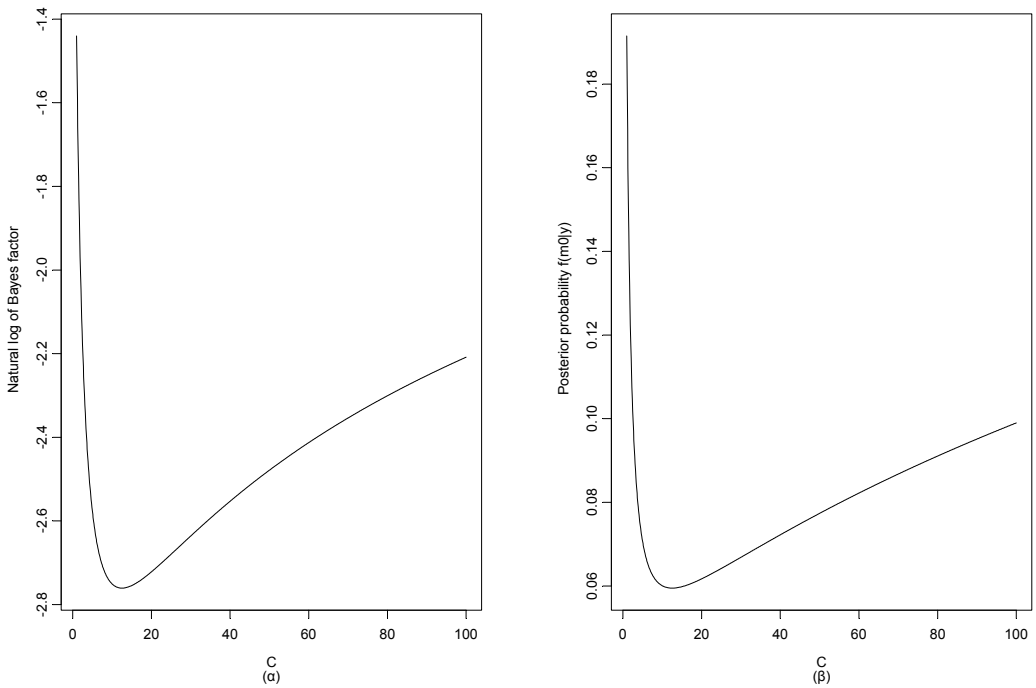
Στη συνέχεια, εξετάσαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για τιμές του C πολύ μικρότερες έως πολύ μεγαλύτερες του μεγέθους του δείγματος, με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotbf7* (βλ. παράρτημα σελ. 159). Στο διάγραμμα 3.26, παρουσιάζεται το γράφημα του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τις τιμές του C από 1 ως 100 (δηλαδή 1 έως n^2). Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-2.76 , -1.44) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.06 , 0.19). Όλες οι τιμές του λογάριθμου είναι μικρότερες του μηδενός (αντίστοιχα, της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 μικρότερες του 0.5) οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που δοκιμάσαμε.



Διάγραμμα 3.24*: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου β) της διασποράς, αντιστοίχως.*



Διάγραμμα 3.25: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των μ_d, σ^2.*



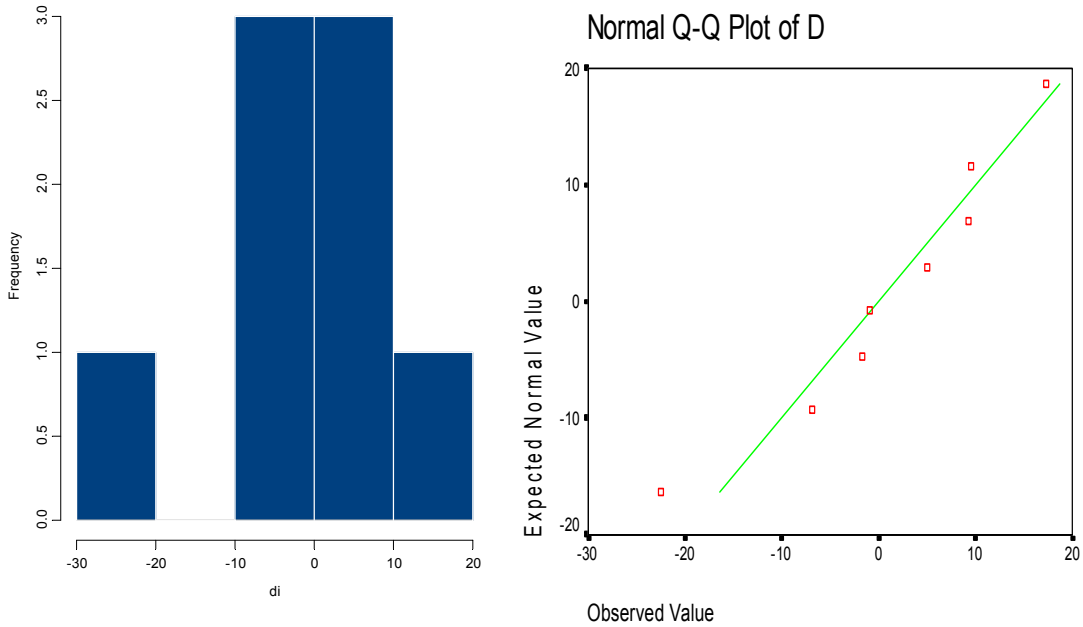
Διάγραμμα 3.26: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1< C < 100).*

<u>Παράδειγμα 3.7</u>: Νάτριο και πίεση αίματος

Σκοπός μίας έρευνας ήταν να εξεταστεί αν η ελάττωση του νατρίου μπορεί να προκαλέσει μείωση της πίεσης του αίματος. Δεν είναι όμως εφικτός ο περιορισμός του νατρίου για μεγάλα χρονικά διαστήματα, για αυτό χρησιμοποιείται μερικές φορές διαιτητική παρακολούθηση σε ειδικά γκρουπ. Μία ομάδα 8 ατόμων εισήχθη σε ένα τέτοιο γκρουπ και καταγράφηκαν οι συγκεντρώσεις του ουρικού νατρίου κατά την εισαγωγή τους, καθώς και μία εβδομάδα αργότερα, (Rosner, 1995). Στον πίνακα 3.5, εμφανίζονται τα αποτελέσματα του ουρικού νατρίου.

Person	*Week 0 (baseline)*	*Week 1*
1	7.85	9.59
2	12.03	34.50
3	21.84	4.55
4	13.94	20.78
5	16.68	11.69
6	41.78	32.51
7	14.97	5.46
8	12.07	12.95

Πίνακας 3.5: *Τα αποτελέσματα ουρικού νατρίου*



Διάγραμμα 3.27: *Το ιστόγραμμα και το Normal Q-Q plot της διαφοράς των παρατηρήσεων του παρ. 3.7*

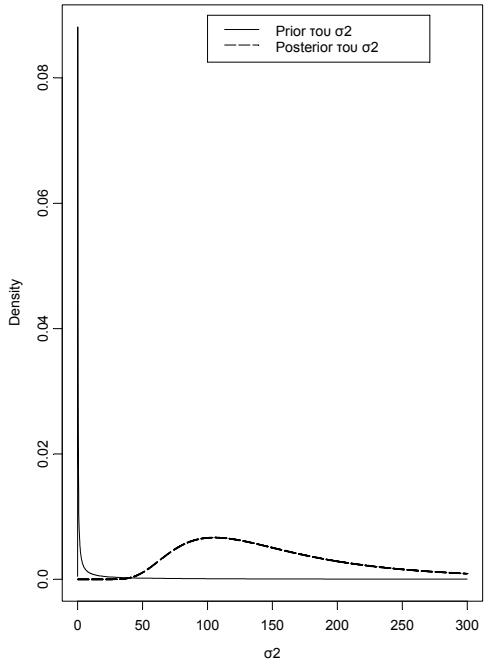
Θέλουμε να εξετάσουμε αν οι μέσες τιμές των συγκεντρώσεων του ουρικού νατρίου διαφέρουν πριν και μετά τη διαιτητική παρακολούθηση μίας εβδομάδας. Οι δύο ομάδες παρατηρήσεων, αναφέρονται στις ίδιες δειγματικές μονάδες, οπότε θα εφαρμοστεί το αντίστοιχο κατά ζεύγη τεστ της Μπεϋζιανής συμπερασματολογίας. Από το q-q plot και το ιστόγραμμα της διαφοράς των τιμών των δύο ομάδων παρατηρήσεων, του διαγράμματος 3.27, θεωρούμε κανονική την κατανομή των

διαφορών $d_i \sim N\left(\mu_d, \sigma^2\right)$. Θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή της διαφοράς των παρατηρήσεων διαφέρει από το μηδέν.

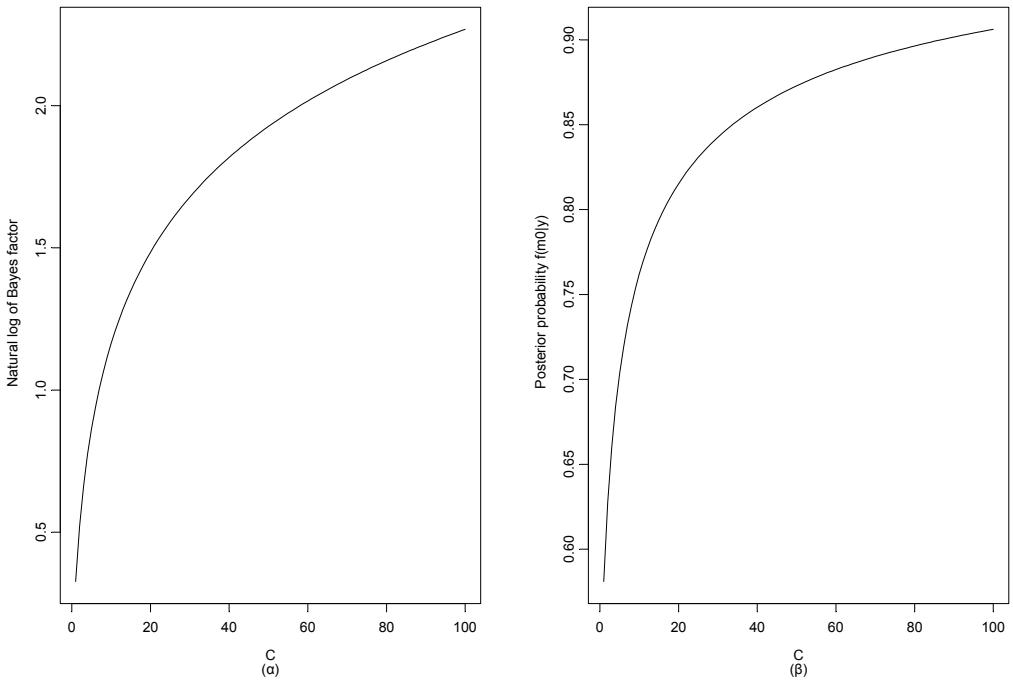
Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, για την παράμετρο μ_d του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή $\mu_d \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, δηλαδή θεωρήσαμε $\underset{\sim}{m}$=0 (ως πιο πιθανή τιμή) και C=8 ως αρκετά μεγάλη τιμή. Για την παράμετρο της διασποράς επιλέγουμε μικρές τιμές για τις παραμέτρους α, b, $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$.

Στον πίνακα 3.7, (σελ. 71) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του παραπάνω ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από την ρουτίνα *bayesnormal.pairedtest2* (βλ. παράρτημα σελ. 157) στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι $\frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 2.89 > 1, αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.74, άρα υπάρχει θετική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης. *Οι μέσες τιμές των συγκεντρώσεων του ουρικού νατρίου δε διαφέρουν σημαντικά πριν και μετά τη διαιτητική παρακολούθηση μίας εβδομάδας*. Επομένως, η διαιτητική παρακολούθηση για μία εβδομάδα δεν προκαλεί περιορισμό του νατρίου και κατ' επέκταση μείωση της πίεσης του αίματος. Η εκ των υστέρων κατανομή για την παράμετρο σ^2 που δίνεται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 3.8) είναι $\sigma^2 \mid \boldsymbol{d} \sim IG(4.01, 527.86)$, 95% διάστημα αξιοπιστίας [60.11 , 482.09]. Στο διάγραμμα 3.28, εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας.

Στο διάγραμμα 3.29, παρουσιάζονται η διακύμανση των τιμών του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τις τιμές του C από 1 ως 100, έγινε εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf7* (βλ. παράρτημα σελ. 159). Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (0.33 , 2.27) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.58 , 0.91). Όλες οι τιμές του λογάριθμου είναι μεγαλύτερες του 0 (αντίστοιχα, της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 μεγαλύτερες του 0.5) οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C.



Διάγραμμα 3.28: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής της διασποράς.*



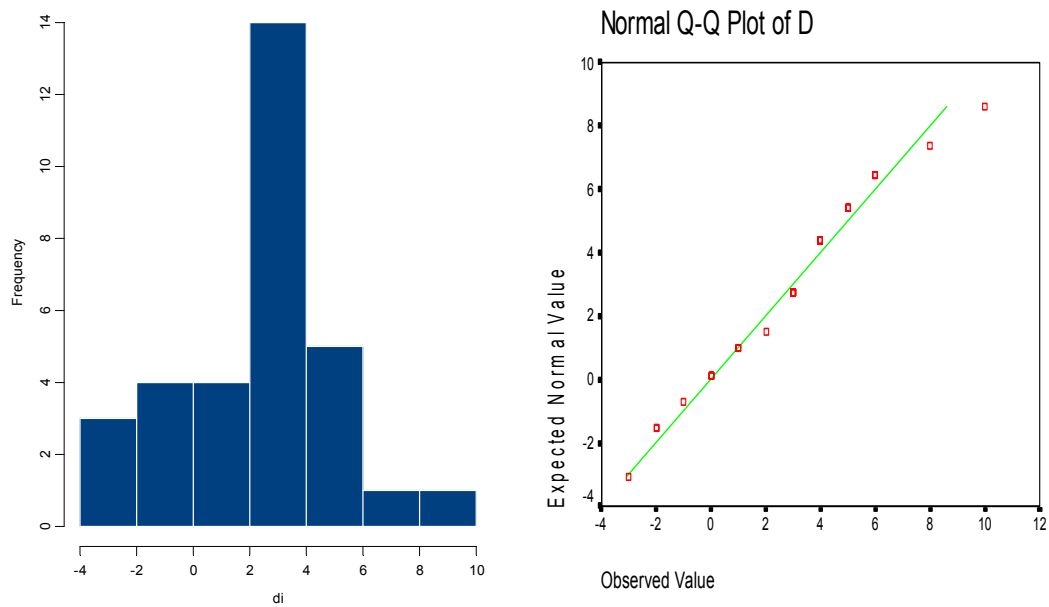
Διάγραμμα 3.29*: Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1< C < 100).*

Παράδειγμα 3.8: *Συμφωνία γιατρών*

Σκοπός μίας προοπτικής έρευνας, ήταν να εξεταστεί η κλινική συμφωνία μεταξύ διαφορετικών γιατρών στη διάγνωση της λεμφαδενοπάθειας (generalized lymphadenopathy). Στην έρευνα συμμετέχουν 32 τυχαία επιλεγμένοι ομοφυλοφιλικοί άντρες που έχουν AIDS ή έχουν συσχετιστεί με άτομα που πάσχουν από AIDS, (Rosner, 1995). Ο συνολικός αριθμός των ψηλαφηθέντων λεμφοκυττάρων που διέγνωσαν 2 γιατροί, παρουσιάζονται στον πίνακα 3.6.

Patient	***Doctor A***	***Doctor B***	***Patient***	***Doctor A***	***Doctor B***
1	4	1	17	4	1
2	17	9	18	12	9
3	3	2	19	10	7
4	11	13	20	9	11
5	12	9	21	5	0
6	5	2	22	3	0
7	5	6	23	12	12
8	6	3	24	5	1
9	3	0	25	13	9
10	5	0	26	12	6
11	9	6	27	6	9
12	1	1	28	19	9
13	5	4	29	8	4
14	8	4	30	15	9
15	7	7	31	6	1
16	8	6	32	5	4

Πίνακας 3.6: *Αριθμός των ψηλαφηθέντων λεμφοκυττάρων για κάθε γιατρό*



Διάγραμμα 3.30: *Το ιστόγραμμα και το Normal q-q plot της διαφοράς των παρατηρήσεων του παρ. 3.8.*

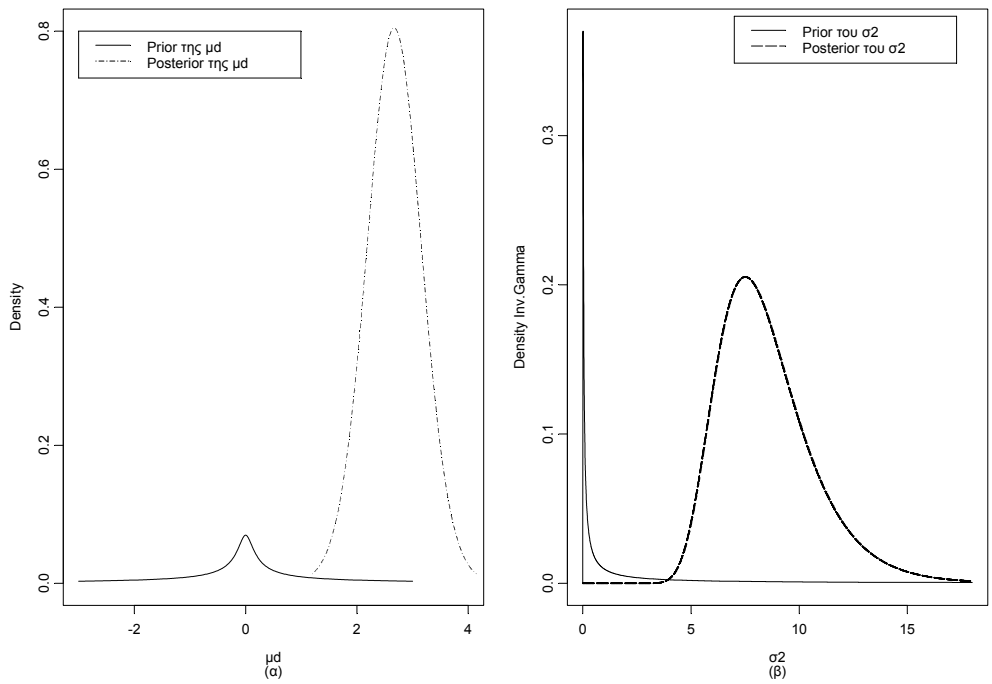
Θέλουμε να ελέγξουμε αν υπάρχει συστηματική διαφορά ανάμεσα στις διαγνώσεις των δύο γιατρών. Οι δύο ομάδες παρατηρήσεων, αναφέρονται στις ίδιες δειγματικές μονάδες, οπότε υπολογίζοντας τις διαφορές τους αναγάγετε σε πρόβλημα ενός πληθυσμού για τον οποίο θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή του διαφέρει από το μηδέν. Από το q-q plot και το ιστόγραμμα της διαφοράς των τιμών των δύο ομάδων παρατηρήσεων, του διαγράμματος 3.30, θεωρούμε κανονική την κατανομή των διαφορών $d_i \sim N\left(\mu_d, \sigma^2\right)$.

Στο μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης, για την παράμετρο σ^2 επιλέγουμε την εκ των προτέρων κατανομή $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$, ενώ στο μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης, για τις παραμέτρους μ_d, σ^2 επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_d \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ και $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$. Θεωρήσαμε $\underset{\sim}{m}$=0 ως πιο πιθανή τιμή, C=32 ως αρκετά μεγάλη τιμή και πολύ μικρές τιμές για τα α, b.

Στον πίνακα 3.7 (σελ. 71), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του παραπάνω ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.pairedtest2* (βλ. παράρτημα σελ. 162) στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι $\frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)} = 1.69 \cdot 10^{-4} <$ 1 άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη ότι υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης. *Ο μέσος αριθμός των ψηλαφηθέντων λεμφοκυττάρων που*

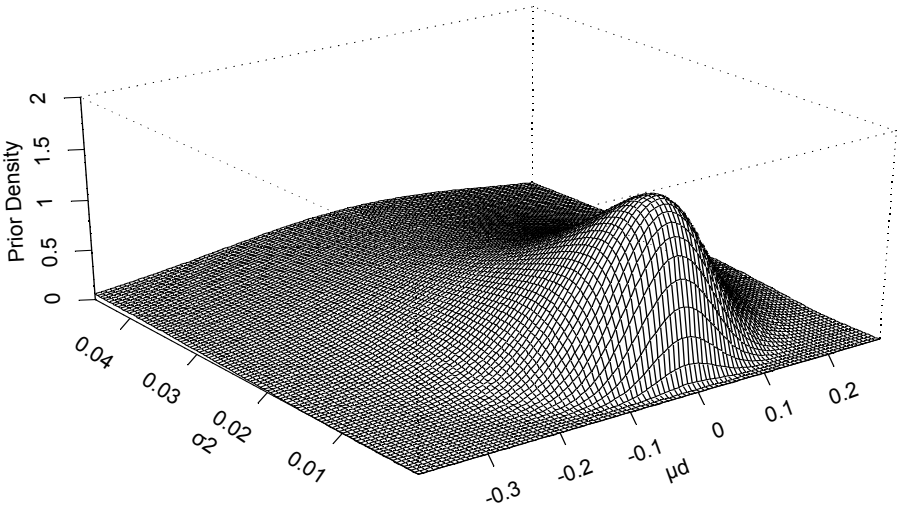
διέγνωσε ο γιατρός Α διαφέρει από αυτόν που διέγνωσε ο γιατρός Β. Συγκεκριμένα, στον πίνακα 3.8 παρατηρούμε ότι η εκ των υστέρων κατανομή για τη μέση τιμή της διαφοράς των παρατηρήσεων των δύο γιατρών εκτιμάται $\mu_d \mid \boldsymbol{d} \sim t_{32.02}\left(2.67,\ 0.242\right)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [1.66 , 3.67] και για τη διασπορά $\sigma^2 \mid \boldsymbol{d} \sim IG(16.01,127.68)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [5.16 , 13.95].

Στο διάγραμμα 3.31.α, παρουσιάζονται τα γραφήματα της εκ των προτέρων $\mu_d \sim t_{0.02}\left(0,1\right)$ και εκ των υστέρων κατανομής της μ_d $\mu_d \mid \boldsymbol{d} \sim t_{32.02}\left(2.67,\ 0.242\right)$ και στο 3.31.β, τα αντίστοιχα γραφήματα για την παράμετρο σ^2. Εναλλακτικά, παρουσιάζουμε το διάγραμμα 3.32, όπου φαίνεται το γράφημα της από κοινού εκ των προτέρων κατανομής των παραμέτρων μ_d και σ^2.

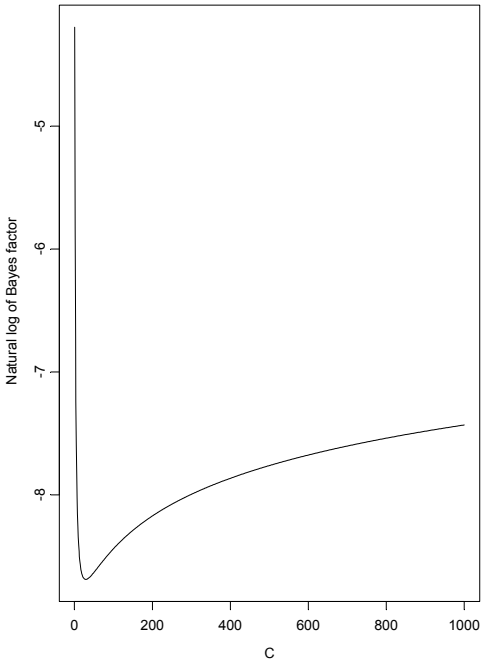


Διάγραμμα 3.31: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου β) της διασποράς, αντιστοίχως.*

Επιπλέον, εξετάσαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές του C, (ρουτίνα *plotbf7* βλ. παράρτημα σελ. 159). Στο διάγραμμα 3.33, παρουσιάζονται τα γραφήματα του λογάριθμου του παράγοντα Bayes για τις τιμές του C από 1 ως 1000 (δηλαδή 1 έως n^2). Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-8.688 , -4.194), δηλαδή σε όλες τις τιμές του C αντιστοιχούν αρνητικές τιμές του λογάριθμου οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για κάθε τιμή.



Διάγραμμα 3.32: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των* μ_d, σ^2.



Διάγραμμα 3.33: *Διάγραμμα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του log-BF σε σχέση με το C (1< C < 1000).*

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	H_0
Παρ. 3.6	0.064	-2.75	15.65	0.06		Θετική
Παρ. 3.7	2.89	1.06	0.35	0.74	Θετική	
Παρ. 3.8	$1.69 \cdot 10^{-4}$	-8.69	$5.93 \cdot 10^{3}$	$1.69 \cdot 10^{-4}$		Κατηγ.

Πίνακας 3.7: *Συνοπτικός πίνακας εκ των υστέρων ανάλυσης για τα παρ. 3.6 - 3.8*
BF: Παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του m_0 έναντι του m_1, log(BF): Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, 1/BF: Παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του m_1 έναντι του m_0, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου

	μ_d		$\sigma^2\|m_0$		$\sigma^2\|m_1$	
	$\tilde{m}'$	σ'	α'	b'	α'	b'
Παρ. 3.6	3.27	0.944	5.01	108.01	5.01	49.10
Παρ. 3.7	1.01	3.81	4.01	527.86	4.01	523.23
Παρ. 3.8	2.67	0.492	16.01	245.01	16.01	127.68

Πίνακας 3.8: *Εκτιμήσεις των παραμέτρων των παρ. 3.6 – 3.8*
$\tilde{m}'$, σ' εκ των υστέρων μέσος και σταθερή απόκλιση της παραμέτρου μ, α', b': παράμετροι της εκ των υστέρων γάμμα κατανομής της παραμέτρου $\tau=1/\sigma^2$.

3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων στατιστικών τεστ και Μπεϋζιανών

Θέλοντας να γίνει μια σύγκριση μεταξύ αποτελεσμάτων των τεστ σημαντικότητας και των εκ των υστέρων πιθανοτήτων για τον έλεγχο υποθέσεων παρουσιάζεται ο πίνακας 3.4. Στον πίνακα αυτό συνοψίζονται οι τιμές του παράγοντα Bayes που υπολογίσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα και στη διπλανή στήλη βλέπουμε τα αποτελέσματα που θα είχαμε αν είχαμε εργαστεί με τα τεστ σημαντικότητας. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο τεστ. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι στις περιπτώσεις που ο παράγοντας Bayes καταδεικνύει κατηγορηματική ένδειξη έναντι του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης (παραδείγματα 3.2 και 3.8) τότε το αντίστοιχο p-value που υπολογίζουν τα τεστ σημαντικότητας είναι πολύ μικρό. Όταν ο παράγοντας Bayes παίρνει μικρότερες τιμές καταδεικνύοντας ισχυρή (παραδείγματα 3.1, 3.4 και 3.5) ή θετική ένδειξη (παραδείγματα 3.6 και 3.7) έναντι κάποιου μοντέλου τότε και οι τιμές του p-value υποστηρίζουν το ίδιο μοντέλο. Στο παράδειγμα 3.3 όπου BF=1.28 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια μικρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης, αντίστοιχα υπολογίζεται p-value= 0.228.

	BF_{01}	*p-value*
Παρ. 3.1	23.23	0.446
Παρ. 3.2	$3.57 \cdot 10^{-172}$	< 0.001
Παρ. 3.3	1.28	0.228
Παρ. 3.4	0.047	0.003
Παρ. 3.5	0.009	< 0.001
Παρ. 3.6	0.064	0.005
Παρ. 3.7	2.896	0.799
Παρ. 3.8	$1.69 \cdot 10^{-4}$	< 0.001

Πίνακας 3.9: *Τα αποτελέσματα των τεστ σημαντικότητας και Μπεϋζιανών ελέγχων.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Έλεγχοι Υποθέσεων δύο Πληθυσμών

4.1 Έλεγχοι υποθέσεων για δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς.

4.1.1 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας διασπορών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής

Θεωρούμε δύο τυχαία δείγματα κανονικής κατανομής, $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ πλήθους n_1 και n_2, αντίστοιχα για τα οποία θα ελέγξουμε την ισότητα των διασπορών τους. Δηλαδή:

$$\mathbf{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \quad \text{έναντι } \mathbf{H_1}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \tag{4.1}$$

Τα μοντέλα που αντιστοιχούν σε κάθε υπόθεση του παραπάνω ελέγχου είναι:

$$m_0: \begin{array}{l} y_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right) \\ y_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right) \end{array} \text{ και } m_1: \begin{array}{l} y_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \\ y_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right) \end{array} \tag{4.2}$$

Οι εκ των προτέρων κατανομές των παραμέτρων κάθε μοντέλου, επιλέγονται σύμφωνα με τα αποτελέσματα των πλασματικών δεδομένων (Παράρτημα Α, σελ 143). Έτσι, στο μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης, για την άγνωστη παράμετρο μ_1 επιλέγουμε την κανονική κατανομή για να περιγράψει την εκ των προτέρων πληροφορία, με μέση τιμή $\underset{\sim}{m}_1$ και διασπορά $\frac{C}{n_1}\sigma^2$ ανάλογη της διασποράς του δείγματος σ^2. Υπενθυμίζουμε ότι η σταθερά C δηλώνει το βαθμό που πιστεύουμε ή εμπιστευόμαστε τα πλασματικά δεδομένα και μπορεί να πάρει τιμές από $1,\ldots,n_1+n_2$. Όμοια επιλέγεται η αντίστοιχη κατανομή για την μ_2, οπότε $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C}{n_1}\sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C}{n_2}\sigma^2\right)$. Για την παράμετρο σ^2 επιλέγουμε την αντίστροφη γάμμα κατανομή $\sigma^2 \sim IG\left(a + \frac{n_1+n_2}{2C} + \frac{1}{2}, \frac{n_1 S_1^{*2} + n_2 S_2^{*2}}{2C} + b\right)$ ή ισοδύναμα επιλέγουμε για

την παράμετρο της ακρίβειας τ = σ^{-2} τη γάμμα κατανομή. Όπου S_1^{*2}, S_2^{*2} είναι οι δειγματικές διασπορές των πλασματικών δεδομένων, (βλ. παράρτημα Α) Οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τον τύπο:

$$f(y_j \mid \mu_j, \sigma^2, m_0) \propto \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ji} - \mu_j \right)^2}{2\sigma^2} \right), \; j = 1,2 \tag{4.3}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes, $f(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\mu}, \sigma^2) f(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2)$, όπου $\boldsymbol{\mu}$=(μ_1,μ_2) υπολογίζονται οι εκ των υστερών πληροφορίες για τις παραμέτρους:

$$\mu_j \mid \boldsymbol{y}_j \sim t_{2a+\frac{n_1+n_2}{C}+n_1+n_2+1} \left(\frac{\underset{\sim}{m}_j + \bar{y}_j C}{1+C}, \frac{\sum (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 + \frac{n_1 (\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m}_1)^2}{1+C} + \sum (y_{2i} - \bar{y}_2)^2 + \frac{n_2 (\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m}_2)^2}{1+C} + \frac{n_1 S_1^{*2} + n_2 S_2^{*2}}{C} + 2b}{\left(2a + \frac{n_1+n_2}{C} + n_1 + n_2 + 1 \right) n_j \frac{1+C}{C}} \right) \text{ j =}$$

1,2

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG\left(a + \frac{n_1+n_2}{2C} + \frac{n_1+n_2}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (y_{2i} - \bar{y}_2)^2}{2} + \frac{n_1 (\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m}_1)^2 + n_2 (\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m}_2)^2}{2(1+C)} + \frac{n_1 S_1^{*2} + n_2 S_2^{*2}}{2C} + b \right)$$

Στο μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης, για τις παραμέτρους μ_1, μ_2 επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές όμοιες με αυτές που επιλέξαμε στο m_0 με τη διαφορά ότι η εκ των προτέρων διασπορά είναι ανάλογη της σ_1^2 και σ_2^2 αντίστοιχα, δηλαδή $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C}{n_1} \sigma_1^2 \right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C}{n_2} \sigma_2^2 \right)$. Για τις παραμέτρους των διασπορών επιλέγουμε την αντίστροφη γάμμα κατανομή για τις εκ των προτέρων κατανομές, $\sigma_1^2 \sim IG\left(a + \frac{1}{2} + \frac{n_1}{2C}, \frac{n_1 S_1^{*2}}{2C} + b \right)$, $\sigma_2^2 \sim IG\left(a + \frac{1}{2} + \frac{n_2}{2C}, \frac{n_2 S_2^{*2}}{2C} + b \right)$. Οι συναρτήσεις πιθανοφάνεια του μοντέλου είναι:

$$f(y_j \mid \mu_j, \sigma_j^2, m_1) \propto \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ji} - \mu_j \right)^2}{2\sigma_j^2} \right), \; j = 1,2\,, \tag{4.4}$$

Μέσω του θεωρήματος του Bayes, $f(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2 \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2) f(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2)$, όπου $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)$ και $\boldsymbol{\sigma}^2=(\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ υπολογίζονται οι εκ των υστερών πληροφορίες για τις παραμέτρους:

$$\mu_j \mid \boldsymbol{y}_j \sim t_{2a+\frac{n_j}{C}+n_j+1}\left(\frac{\underset{\sim}{m}_j+\bar{y}_j C}{1+C}, \frac{C\left(\sum\left(y_{ji}-\bar{y}_j\right)^2+\frac{n_j}{1+C}\left(\bar{y}_j-\underset{\sim}{m}_j\right)^2+\frac{n_j S_j^{*2}}{C}+2b\right)}{n_j\left(1+C\right)\left(2a+\frac{n_j}{C}+n_j+1\right)}\right)$$

$$\sigma_j^2 \mid \boldsymbol{y}_j \sim IG\left(a+\frac{n_j}{2C}+\frac{n_j+1}{2}, \frac{\sum\left(y_{ji}-\bar{y}_j\right)^2}{2}+\frac{n_j}{2\left(1+C\right)}\left(\bar{y}_j-\underset{\sim}{m}_j\right)^2+\frac{n_j S_j^{*2}}{2C}+b\right), \text{ j=1,2}$$

<u>*Παράγοντας Bayes:*</u>

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του m_0 έναντι του m_1:

$$\text{BF}=\frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)} =$$

$$\frac{\Gamma\left(a+\frac{n_1+n_2}{2C}+\frac{1}{2}+\frac{n_1+n_2}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}+\frac{n_1}{2C}\right)\cdot\Gamma\left(a+\frac{1}{2}+\frac{n_2}{2C}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{n_1+n_2}{2C}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}+\frac{n_1}{2C}+\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(a+\frac{1}{2}+\frac{n_2}{2C}+\frac{n_2}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\frac{n_1^* S_1^{*2}+n_2^* S_2^{*2}}{2C}+b\right)^{a+\frac{n_1+n_2}{2C}+\frac{1}{2}}\left[\frac{\sum\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)^2}{2}+\frac{n_1\left(\bar{y}_1-\underset{\sim}{m}_1\right)^2}{2\left(1+C\right)}+\frac{n_1 S_1^{*2}}{2C}+b\right]^{a+\frac{n_1}{2C}+\frac{n_1+1}{2}}\left[\frac{\sum\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)^2}{2}+\frac{n_2\left(\bar{y}_2-\underset{\sim}{m}_2\right)^2}{2\left(1+C\right)}+\frac{n_2 S_2^{*2}}{2C}+b\right]^{a+\frac{n_2}{2C}+\frac{n_2+1}{2}}}{\left[\frac{\sum\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)^2+\sum\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)^2}{2}+\frac{n_1\left(\bar{y}_1-\underset{\sim}{m}_1\right)^2+n_2\left(\bar{y}_2-\underset{\sim}{m}_2\right)^2}{2\left(1+C\right)}+\frac{n_1^* S_1^{*2}+n_2^* S_2^{*2}}{2C}+b\right]^{a+\frac{n_1+n_2}{2C}+\frac{1}{2}+\frac{n_1+n_2}{2}}\left(\frac{n_1 S_1^{*2}}{2C}+b\right)^{a+\frac{1}{2}+\frac{n_1}{2C}}\cdot\left(\frac{n_2 S_2^{*2}}{2C}+b\right)^{a+\frac{1}{2}+\frac{n_2}{2C}}}$$

Διερευνώντας τον τύπο που υπολογίζει τον παράγοντα Bayes παρατηρούμε ότι εξαρτάται από:

- την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας κάθε δείγματος από τον αντίστοιχο εκ των προτέρων μέσο, χωριστά.
- την τετραγωνική απόσταση των δεδομένων από τον αντίστοιχο δειγματικό μέσο.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει για την ανάλυση μας, καθώς και από τις τιμές των παραμέτρων C, α, b. δηλαδή τη διασπορά που επιλέξαμε για την εκ των προτέρων κατανομή.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μεγάλη τιμή για το C και πολύ μικρές τιμές για τα α, b τότε αυξάνεται η τιμή του παράγοντα Bayes, δηλαδή να υποστηρίζει το μοντέλο της μηδενικής υπόθεση πιο ισχυρά, (καθώς $C \to \infty$ και $a,b \to 0 \Rightarrow BF \to \infty$). Παρατηρούμε ότι θέτοντας $C \to \infty$ και $a,b \to 0$ επιτυγχάνουμε μεγάλη εκ των προτέρων διασπορά για τις παραμέτρους των υποθέσεων που ελέγχουμε, εδώ για τις διασπορές, με αποτέλεσμα πολύ μεγάλη τιμή του παράγοντα Bayes. Αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το παράδοξο του Lindley-Bartlett αφού η Μπεϋζιανή ανάλυση οδηγεί σε ένδειξη υπέρ της μηδενικής υπόθεσης σε αντίθεση με τα τεστ σημαντικότητας που δείχνουν ένδειξη έναντι σε αυτή.

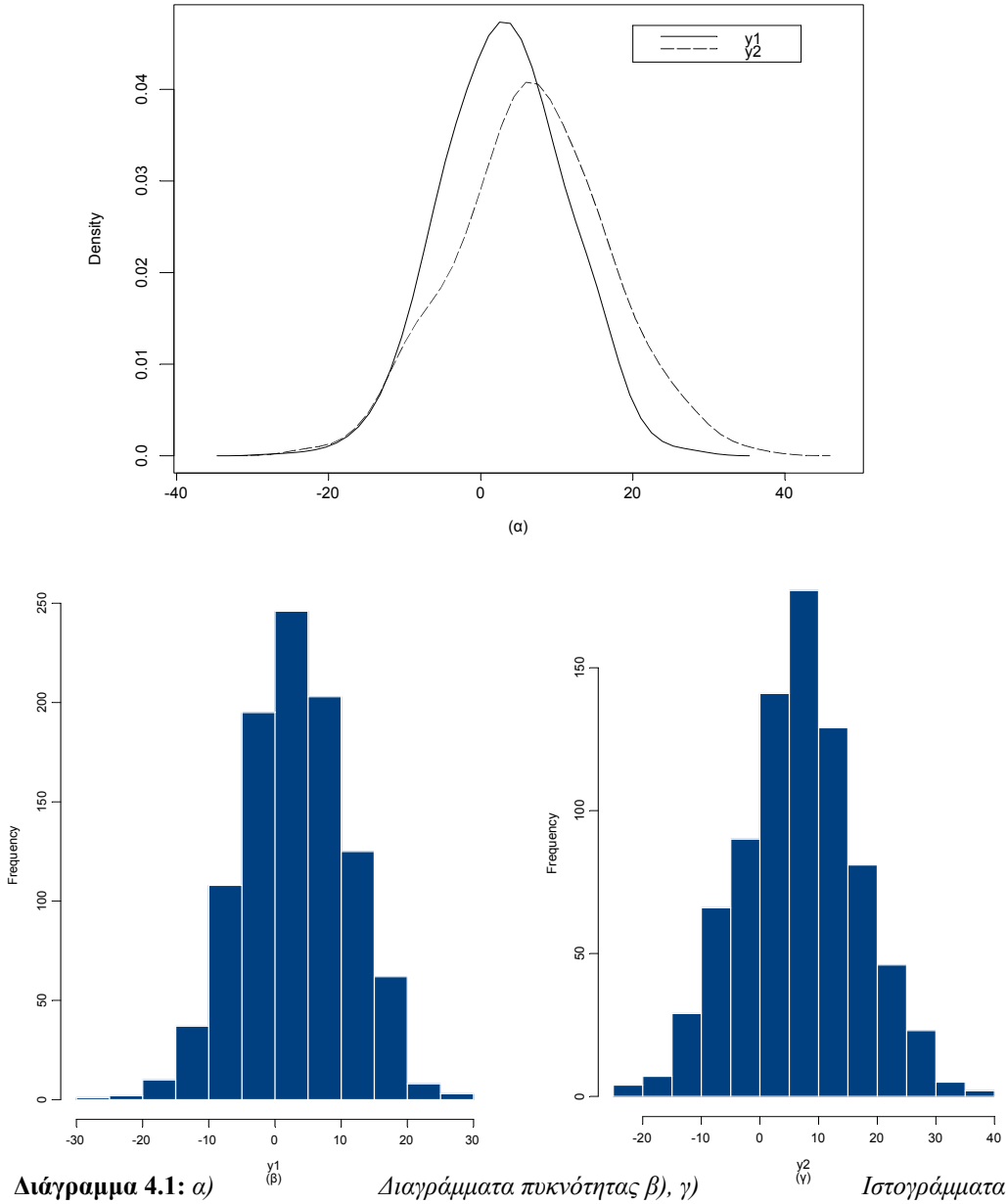
<u>Παράδειγμα 4.1</u>: Προσομοιωμένα δεδομένα (3)

Προσομοιώνουμε 1000 παρατηρήσεις (y_{1i}) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 3, τυπική απόκλιση 8 και 800 παρατηρήσεις (y_{2i}) με μέση τιμή 7, τυπική απόκλιση 10. Θα γίνει ο έλεγχος της ισότητας των διασπορών των δύο δειγμάτων. Στο διάγραμμα 4.1, δίνονται τα διαγράμματα πυκνότητας και τα ιστογράμματα των μεταβλητών. Για κάθε σύνολο παρατηρήσεων θεωρούμε $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, οπότε:

$$\mathbf{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \text{ έναντι } \mathbf{H_1}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Τα συγκρινόμενα μοντέλα δίνονται από τον τύπο 4.2. Στο μοντέλο m_0, για άγνωστες παραμέτρους μ_1, μ_2, σ^2, επιλέγουμε για την εκ των προτέρων πληροφορία τις κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 1.8 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2.25 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(1.01, 0.51)$. Όμοια στο μοντέλο m_1, για τις άγνωστες παραμέτρους μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, επιλέγουμε για την εκ των προτέρων πληροφορία τις κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 1.8 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2.25 \cdot \sigma_2^2\right)$,

$\sigma_1^2 \sim IG(0.79, 0.29)$, $\sigma_2^2 \sim IG(0.73, 0.23)$. Και στις δυο περιπτώσεις θεωρήσαμε $C = 1800$ ως αρκετά μεγάλη τιμή, $a = b = 0.01$ ως αρκετά μικρές τιμές και αυθαίρετα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$ όπως εξηγούμε στο Παράρτημα Α.



Διάγραμμα 4.1: *α) Διαγράμματα πυκνότητας β), γ) Ιστογράμματα των παρατηρήσεων y_1, y_2 του παραδείγματος 4.1*

Στον πίνακα 4.1, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 167). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\dfrac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)}$ = $7.68 \cdot 10^{-8} < 1$ άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης, *δηλαδή οι*

διασπορές των δύο κατανομών δε μπορούν να θεωρηθούν ίσες. Οι εκ των υστέρων κατανομές που δίνονται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 4.2) είναι:

$\mu_1 \mid \boldsymbol{y} \sim t_{1001.6}\left(3.05, 2.07\cdot 10^{-5}\right), \mu_2 \mid \boldsymbol{y} \sim t_{801.5}\left(6.66, 3.31\cdot 10^{-5}\right), \sigma_1^2 \sim IG\left(500.79, 10.38\right)$

και $\sigma_2^2 \sim IG\left(400.73, 10.60\right)$.

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	$E.\varepsilon.H_1$	$E.\varepsilon.H_0$
Παρ. 4.1	$7.68*10^{-8}$	-16.38	$1.3*10^{7}$	$7.68*10^{-8}$		Κατηγορηματική

Πίνακας 4.1: *Αποτελέσματα του ελέγχου ισότητας διασπορών του παρ. 4.1*
BF_{01}: Παράγοντας Bayes, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, $1/BF_{01}$: Αντίστροφος του παράγοντα Bayes, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

	m_0		m_1	
	m'	σ'	m'	σ'
μ_1	3.05	0.0035	3.05	0.0045
μ_2	5.33	0.0039	6.66	0.0057
	α'		b'	
σ^2	900.01		11.19	
σ_1^2	500.79		10.38	
σ_2^2	400.73		10.60	

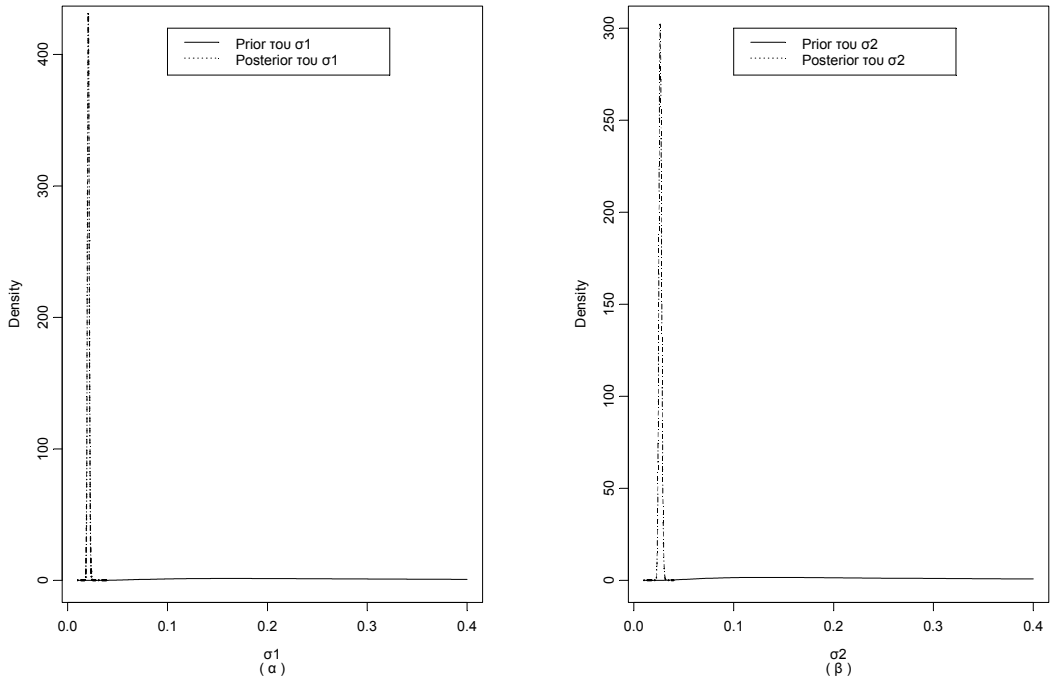
Πίνακας 4.2: *Εκτιμήσεις των παραμέτρων του παρ. 4.1*
m': Εκ των υστερών μέσος του μ, σ': Εκ των υστερών σταθερή απόκλιση του μ, α': εκ των υστερών άλφα και b': εκ των υστέρων βήτα

Στο διάγραμμα 4.2, εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας των διασπορών των δύο κατανομών. Στο διάγραμμα 4.3, παρουσιάζεται γραφικά η από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των παραμέτρων μ_1, σ_1^2 και μ_2, σ_2^2.

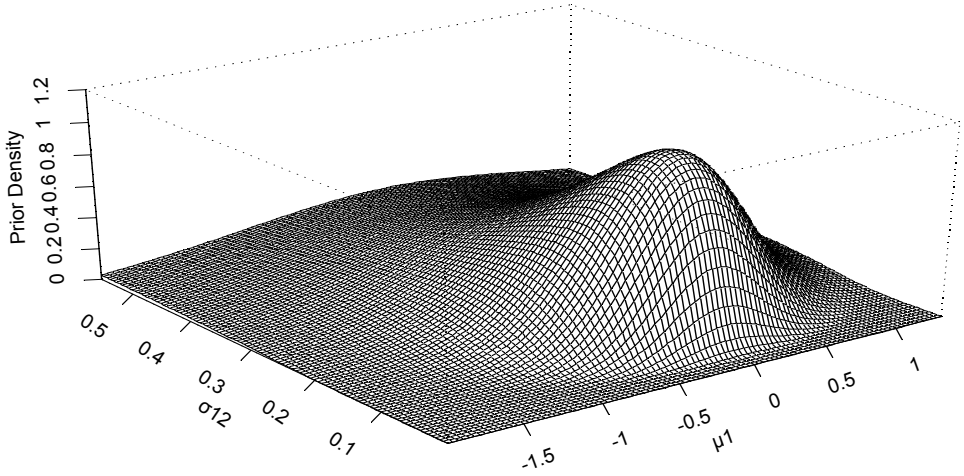
Στη συνέχεια ελέγξαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές των παραμέτρων α, b. Στο διάγραμμα 4.4, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του λογάριθμου του παράγοντα Bayes για τιμές των α, b από 10^{-10} εώς 6 και C=1800. Οι τιμές των α,b μικρότερες από 5.34, αντιστοιχούν σε τιμές του παράγοντα Bayes μικρότερες της μονάδας, δηλαδή είναι το διάστημα απόρριψης της μηδενικής

υπόθεσης. Με άλλα λόγια για τιμές των α, b μεγαλύτερες του 5.34 δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

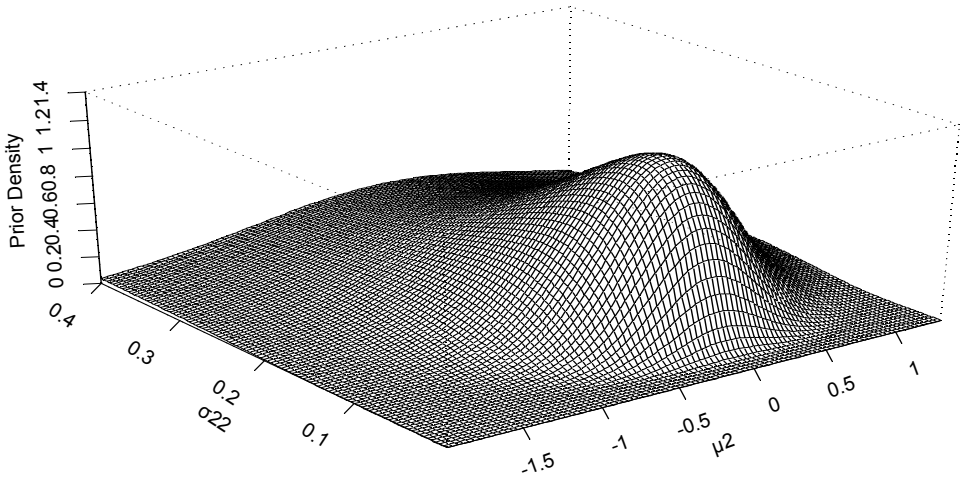
Στο διάγραμμα 4.5 βλέπουμε πως κυμαίνονται οι τιμές του παράγοντα Bayes όταν η σταθερά C παίρνει τιμές πολύ μικρότερες έως πολύ μεγαλύτερες από το άθροισμα των μεγεθών των δειγμάτων (n_1+n_2). Έτσι θεωρούμε ότι το C παίρνει τιμές από 1 έως $C = 1800^2$ και ότι $a = b = 10^{-10}$. Παρατηρούμε ότι και οι τιμές του παράγοντα Bayes τείνουν στο άπειρο, καθώς αυξάνονται οι τιμές του C**.** Το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes είναι ($3.5 \cdot 10^{-31}$, $2.78 \cdot 10^{-6}$) οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C, που δοκιμάσαμε.



Διάγραμμα 4.2: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) της διασποράς σ_1^2 και β) της σ_2^2.*

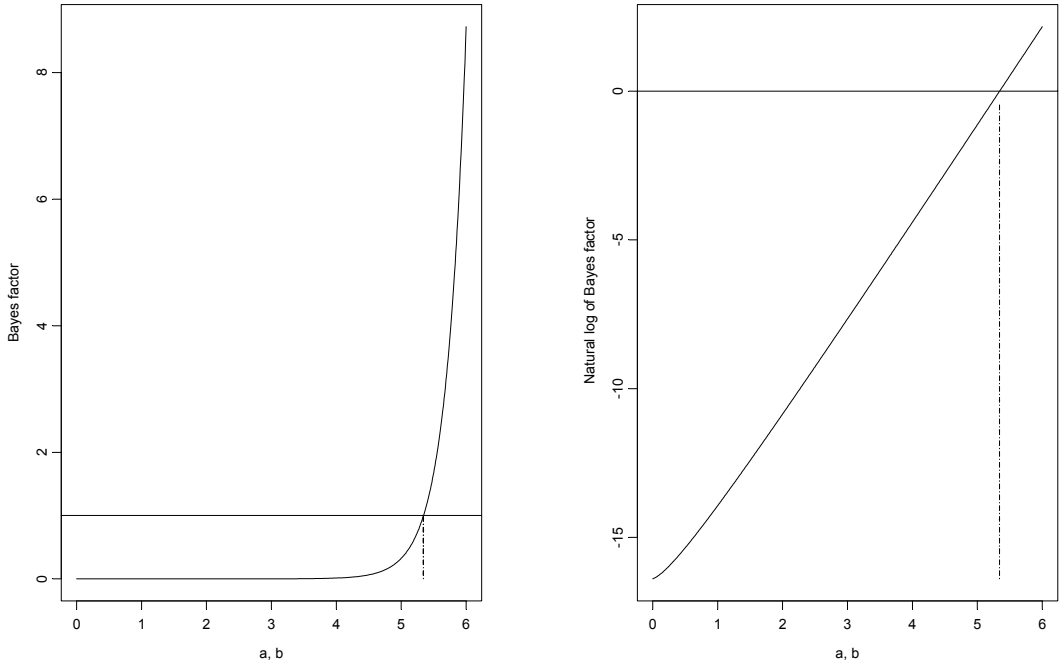


(α)

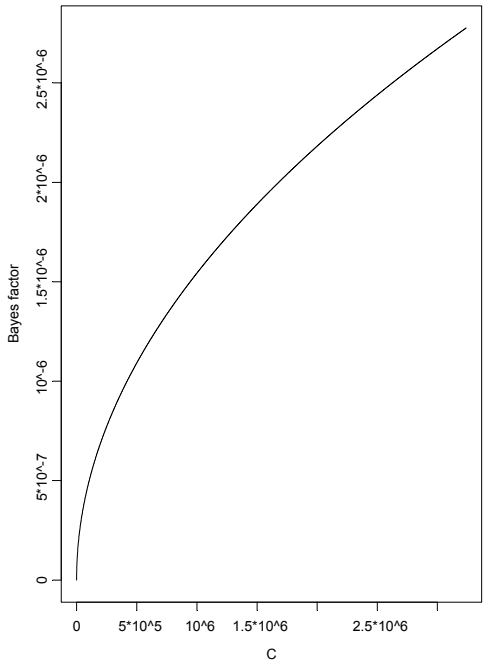


(β)

Διάγραμμα 4.3: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των α)* μ_1 , σ_1^2 *και β)* μ_2 , σ_2^2



Διάγραμμα 4.4: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του α) BF και β) log-BF σε σχέση με τις τιμές των α,b (10^{-10} < α,b < 6).*



Διάγραμμα 4.5: *Διάγραμμα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του BF σε σχέση με το C ($1<C<3.3\cdot 10^{6}$ και α ,b=10^{-10}).*

4.1.2 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με ίσες γνωστές διασπορές.

Θεωρούμε τα τυχαία δείγματα $\boldsymbol{y}_1 = (y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n_1})$ και $\boldsymbol{y}_2 = (y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2n_2})$, μεγέθους n_1 και n_2 αντίστοιχα, τα οποία προέρχονται από κανονικές κατανομές με ίσες και γνωστές διασπορές. Καλούμαστε να ελέγξουμε την ισότητα των μέσων τιμών των δύο πληθυσμών.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu \ \text{ έναντι } \mathbf{H_1}: \ \mu_1 \neq \mu_2 \tag{4.5}$$

Τα αντίστοιχα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν οι παραπάνω υποθέσεις είναι:

$$\mathbf{m_0}: \begin{matrix} y_{1i} \sim N(\mu, \sigma^2) \\ y_{2i} \sim N(\mu, \sigma^2) \end{matrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{m_1}: \begin{matrix} y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma^2) \\ y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma^2) \end{matrix} \tag{4.6}$$

Σύμφωνα με το κεφάλαιο 1 (ενότητα 1.3.3), η εκ των προτέρων κατανομή που επιλέγουμε για την παράμετρο μ είναι η $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n_1 + n_2}\sigma^2\right)$, όπου το C δηλώνει την αβεβαιότητα μας απέναντι στα πλασματικά δεδομένα για αυτό της δίνουμε πολύ μεγάλες τιμές. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις πιθανοφάνειας είναι:

$$f(y_j \mid \mu, \sigma^2, m_0) \propto \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ji} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right), \ j = 1, 2 \tag{4.7}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes, $f(\mu \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \mu) f(\mu)$ υπολογίζεται η εκ των υστέρων πληροφορία της παραμέτρου $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m} + \frac{\left(n_1\bar{y}_1 + n_2\bar{y}_2\right)C}{n_1 + n_2}}{1 + C}, \frac{C}{\left(1 + C\right)}\frac{\sigma^2}{\left(n_1 + n_2\right)}\right)$ ή εναλλακτικά γράφουμε $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\tilde{m}, \sigma'^2\right)$.

Ομοίως οι εκ των προτέρων κατανομές που επιλέγουμε για τις παραμέτρους μ_1, μ_2 (ενότητα 1.3.5) είναι οι $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C}{n_1}\sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C}{n_2}\sigma^2\right)$ και οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας:

$$f(y_j \mid \mu_j, \sigma^2, m_1) \propto \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ji} - \mu_j \right)^2}{2\sigma^2} \right), \; j = 1, 2, \tag{4.8}$$

Μέσω του θεωρήματος του Bayes, $f(\mu_1, \mu_2 \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y}_1 \mid \mu_1) f(\boldsymbol{y}_2 \mid \mu_2) f(\mu_1) f(\mu_2)$ υπολογίζονται οι εκ των υστερών πληροφορίες για τις παραμέτρους:

$$\mu_1 \mid \boldsymbol{y_1} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m}_1 + \bar{y}_1 C}{1+C}, \frac{C}{(1+C)} \frac{\sigma^2}{n_1} \right), \; \mu_2 \mid \boldsymbol{y_2} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m}_2 + \bar{y}_2 C}{1+C}, \frac{C}{(1+C)} \frac{\sigma^2}{n_2} \right)$$

Ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας για κάθε μία από τις παραμέτρους είναι το $\tilde{m} \pm z_{q/2}\sigma'$, όπου $\tilde{m}$ είναι ο εκ των υστέρων μέσος και σ' η εκ των υστέρων τυπική απόκλιση της αντίστοιχης παραμέτρου.

Παράγοντας Bayes:

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes του μοντέλου m_0 έναντι του m_1:

$$\frac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)} =$$

$$\sqrt{1+C} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{n_1+n_2}{1+C} \left[\frac{n_1}{n_1+n_2} \left\{ (\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m})^2 - (\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m}_1)^2 \right\} + \frac{n_2}{n_1+n_2} \left\{ (\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m})^2 - (\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m}_2)^2 \right\} + \frac{C n_1 n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2)} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 \right] \right)$$

Από τη διερεύνηση του τύπου του παράγοντα Bayes προκύπτει ότι εξαρτάται από:

- την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας κάθε δείγματος από τον εκ των προτέρων μέσο κάθε υπόθεσης
- την τετραγωνική απόσταση των δειγματικών μέσων

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος των δείγματων που έχουμε επιλέξει για την ανάλυση μας, καθώς και από την τιμή της σταθεράς C, δηλαδή τη διασπορά που επιλέξαμε για την εκ των προτέρων κατανομή. Στην περίπτωση τα δείγματα έχουν πολύ μεγάλο μέγεθος, τότε η τιμή του παράγοντα Bayes γίνεται πολύ μικρή, δηλαδή τείνει ασυμπτωτικά (όταν $n_1, n_2 \to \infty$) στο μηδέν.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μεγάλη τιμή για το C, δηλαδή μεγάλες εκ των προτέρων διασπορές για τις μέσες τιμές, τότε αυξάνεται η τιμή του παράγοντα Bayes, δηλαδή υποστηρίζεται πιο ισχυρά το μοντέλο της μηδενικής υπόθεση, (καθώς $C \to \infty \Rightarrow BF \to \infty$). Αυτή ακριβώς ήταν η παρατήρηση του Shafer σχετικά με το παράδοξο του Lindley όπου ανέφερε ότι όταν η εκ των προτέρων διασπορά είναι πολύ μεγαλύτερη της διασποράς του δείγματος η Μπεϋζιανή ανάλυση οδηγεί σε ένδειξη υπέρ της μηδενικής υπόθεσης σε αντίθεση με τα τεστ σημαντικότητας που δείχνουν ένδειξη έναντι σε αυτή (Shafer, 1982).

Όταν η τιμή της σταθεράς C γίνει πολύ μικρή $(C \to 0)$ ο παράγοντας Bayes παίρνει την τιμή

$$\mathrm{BF} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n_1\left\{(\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m})^2 - (\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m}_1)^2\right\} + n_2\left\{(\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m})^2 - (\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m}_2)^2\right\}\right]\right).$$

Όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα τις τιμές των εκ των προτέρων μέσων τις αντικαθιστούμε με την τιμή μηδέν, οπότε σε αυτή την περίπτωση ο παράγοντας Bayes παίρνει τιμές πολύ κοντά στη μονάδα. Συνεπώς όταν επιλέγουμε πολύ μικρή εκ των προτέρων διασπορά (σχεδόν μηδενική) τότε δε μπορούμε να έχουμε σημαντική ένδειξη υπέρ κάποιου μοντέλου.

<u>Παράδειγμα 4.2</u>: Προσομοιωμένα δεδομένα (4)

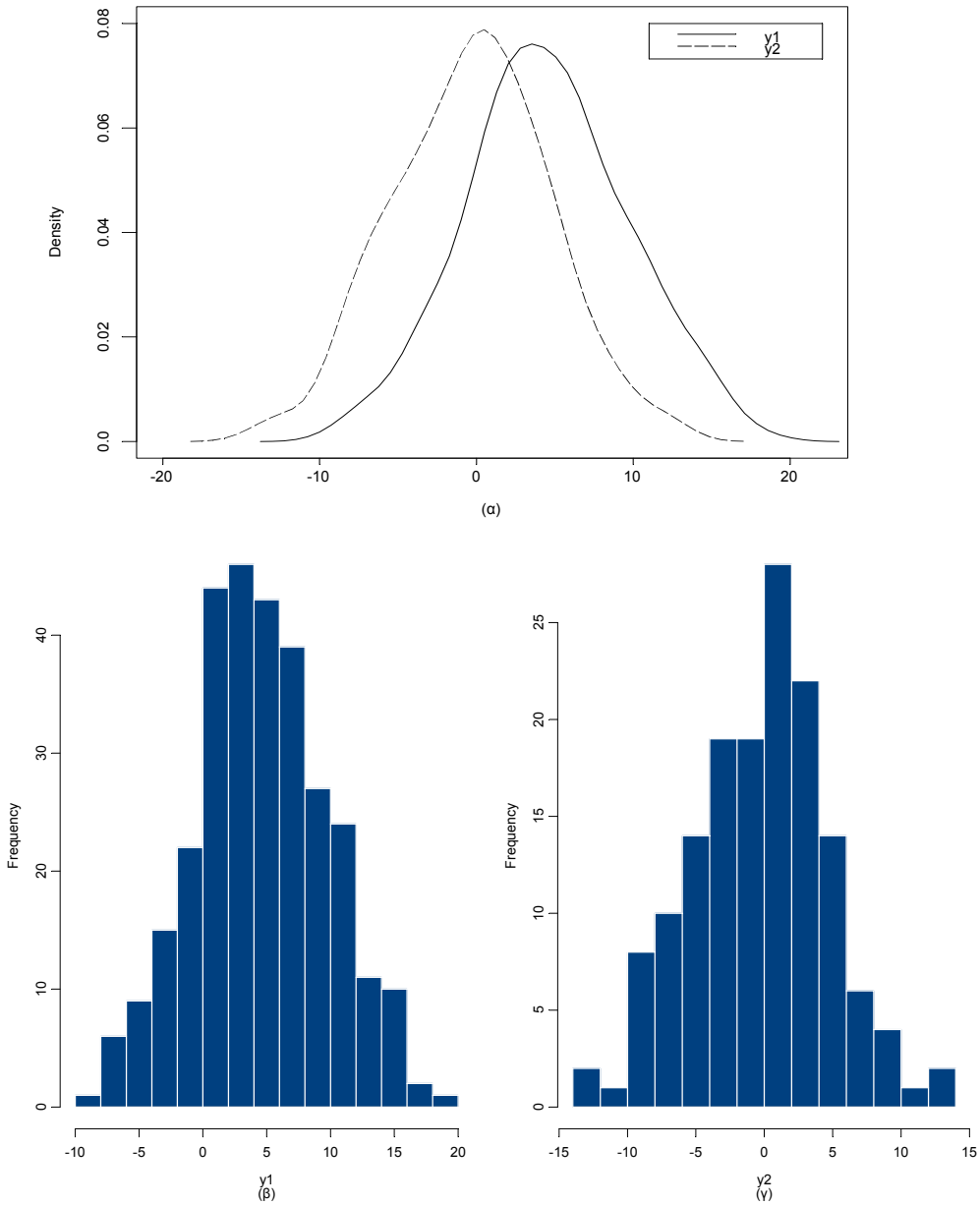
Προσομοιώνουμε 300 παρατηρήσεις (y_{1i}) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 5, τυπική απόκλιση 5 και 150 παρατηρήσεις (y_{2i}) με μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση 5. Θεωρούμε $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ για τα σύνολα των δεδομένων και θα ελέγξουμε την ισότητα των μέσων τους. Στο διάγραμμα 4.6 δίνονται τα διαγράμματα πυκνότητας και τα ιστογράμματα των μεταβλητών.

Αρχικά, θα ελεγχθεί η ισότητα των διασπορών των δύο δειγμάτων.

$$\mathbf{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \quad \text{έναντι } \mathbf{H_1}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Τα συγκρινόμενα μοντέλα του έλεγχου υποθέσεων δίνονται από τον τύπο 4.6. Για τις παραμέτρους του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 1.5 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 3 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(1.01, 0.51)$. Οι

αντίστοιχες κατανομές για τις παραμέτρους του μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης είναι οι $\mu_1 \sim N\left(0, 1.5 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 3 \cdot \sigma_2^2\right)$, $\sigma_1^2 \sim IG\left(0.84, 0.34\right)$, $\sigma_2^2 \sim IG\left(0.67, 0.17\right)$. Δηλαδή, επιλέξαμε C=450 ως αρκετά μεγάλη τιμή, α=b=0.01 ως αρκετά μικρές τιμές και θεωρήσαμε αυθαίρετα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.



Διάγραμμα 4.6: *α) Διαγράμματα πυκνότητας β), γ) Ιστογράμματα των y_1 και y_2 αντίστοιχα για το παράδειγμα 4.2*

Στον πίνακα 4.3 (σελ. 98), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα

σελ. 167). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = 75.43 > 1, αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.987, *άρα υπάρχει ισχυρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης, δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

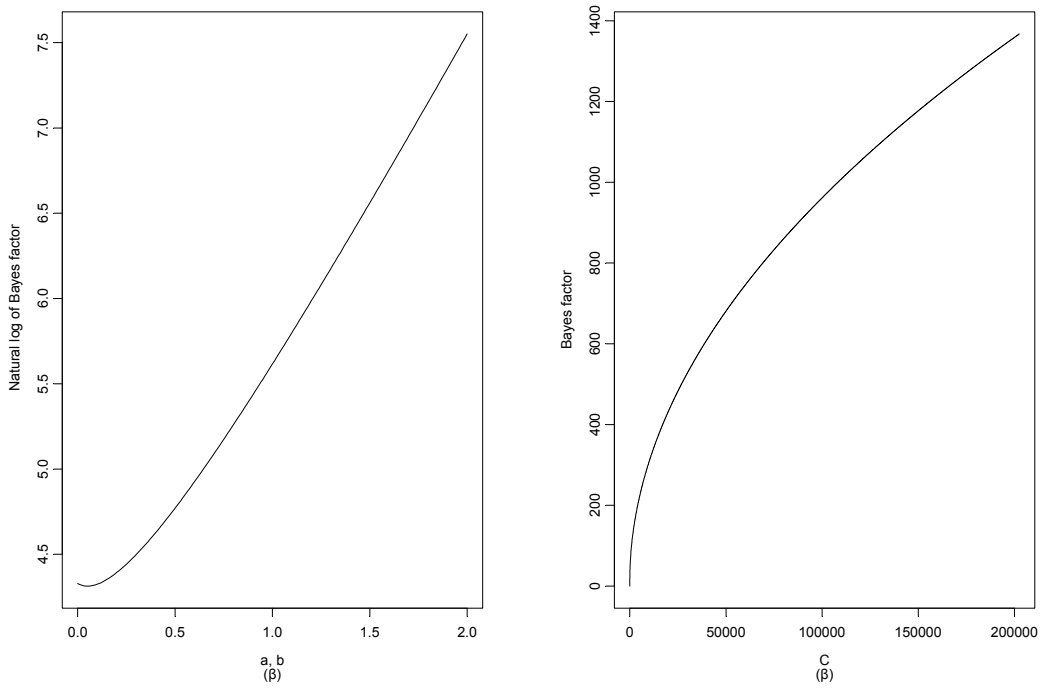
Αναζητώντας μια μη πληροφοριακή εκ των προτέρων κατανομή στον παραπάνω έλεγχο για τις παραμέτρους σ^2, σ_1^2 και σ_2^2 επιλέξαμε τα α = b = 0.01 και μεγάλη τιμή για τη σταθερά C=450. Στη συνέχεια, εξετάζουμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes ως προς διάφορες τιμές των α, b, με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf5.alpha* (βλ. παράρτημα σελ. 168). Στο διάγραμμα 4.7α, εμφανίζεται γραφικά ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes για την περίπτωση α = b όταν παίρνουν τιμές από 10^{-10} έως 2. Το εύρος των τιμών του λογαρίθμου είναι [4.31 , 7.55], επομένως υποστηρίζεται το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης για όλες τις τιμές των α, b που εξετάσαμε.

Στο διάγραμμα 4.7β, παρουσιάζεται η διακύμανση των τιμών του παράγοντα Bayes για τιμές του C από 1 ως 202500 (από 1 έως $(n_1+n_2)^2$), όταν $a,\beta \to 0$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του είναι ($4.53 \cdot 10^{-3}$, $1.37 \cdot 10^{3}$). Το διάστημα των τιμών του C με τιμές μεγαλύτερες του 2.81 είναι το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Τα γραφήματα κατασκευάστηκαν με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotbf5.C* (βλ. παράρτημα σελ. 169).

Κάτω από την παραδοχή της ισότητας των διασπορών θα εφαρμοστεί ο έλεγχος της ισότητας των μέσων των δύο δειγμάτων, όμοια με αυτόν της ενότητας 4.1.2.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu \ \text{ έναντι } \mathbf{H_1}: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

Τα μοντέλα που αντιστοιχούν σε κάθε υπόθεση καθώς και οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τους τύπους 4.6, 4.7, 4.8, αντίστοιχα. Για την άγνωστη παράμετρος μ, του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης επιλέγουμε για την εκ των προτέρων κατανομή την $\mu \sim N(0,25)$. Οι αντίστοιχες κατανομές των παραμέτρων μ_1 και μ_2, του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης είναι οι ακόλουθες $\mu_1 \sim N(0,37.5)$, $\mu_2 \sim N(0,75)$. Θεωρήσαμε και στα δύο μοντέλα C= n_1+n_2 = 450 ως αρκετά μεγάλη τιμή και $\sigma^2 = 25$.

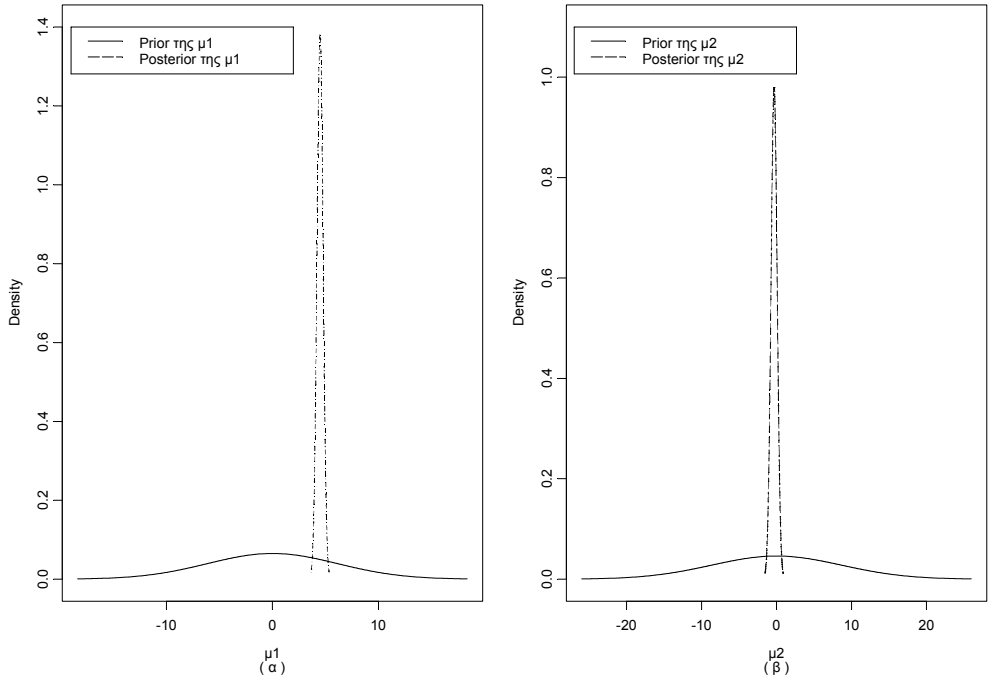


Διάγραμμα 4.7: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF σε σχέση με τα α,b (10^{-10}<α,b< 2) και (β) του BF σε σχέση με το C (1< C < 202500).*

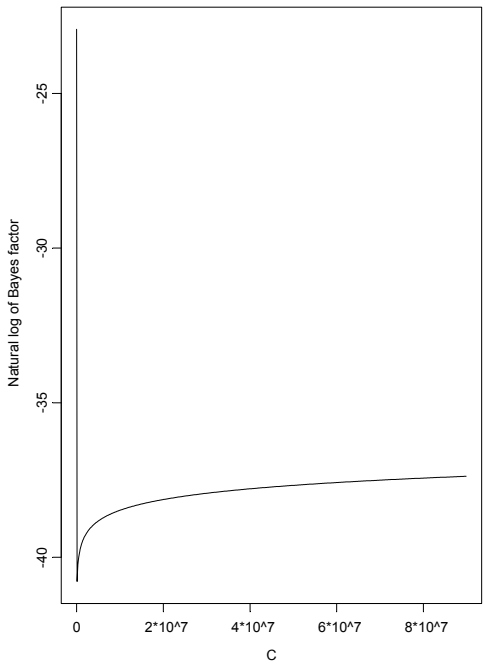
Στον πίνακα 4.4 (σελ. 98) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν με την εφαρμογή της ρουτίνας *bayesnormal.2sample.t1* στο S-Plus (βλ παράρτημα σελ. 160). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = $1.45\cdot 10^{-19} < 1$, υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη έναντι του αρχικού μοντέλου οπότε υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης. *Άρα οι μέσες τιμές των δύο κατανομών δε θεωρούνται ίσες* και οι εκ των υστέρων κατανομές που δίνονται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 4.5, σελ 98) είναι $\mu_1 \,|\, \boldsymbol{y} \sim N(4.49, 0.083)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [3.92 , 5.05] και $\mu_2 \,|\, \boldsymbol{y} \sim N(-0.33, 0.166)$ με αντίστοιχο διάστημα [-1.13 , 0.47]. Στο διάγραμμα 4.8 εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας για κάθε παράμετρο.

Στον παραπάνω έλεγχο, η σταθερά C αντικαταστάθηκε από το άθροισμα του μεγέθους των δυο δειγμάτων. Επιπλέον, εξετάσαμε την ευαισθησία των τιμών του λογάριθμου του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές του C με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf3* στο S-PLUS (βλ. παράρτημα σελ. 161). Στο διάγραμμα 4.9, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα γραφήματα για τιμές του C από 1 έως $9\cdot 10^7$ (δηλαδή 1 έως $(n_1+n_2)^3$). Παρατηρούμε, ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-40.78 , -

22.92) δηλαδή, όλες οι τιμές του λογάριθμου είναι μικρότερες του μηδενός οπότε υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που δοκιμάσαμε.



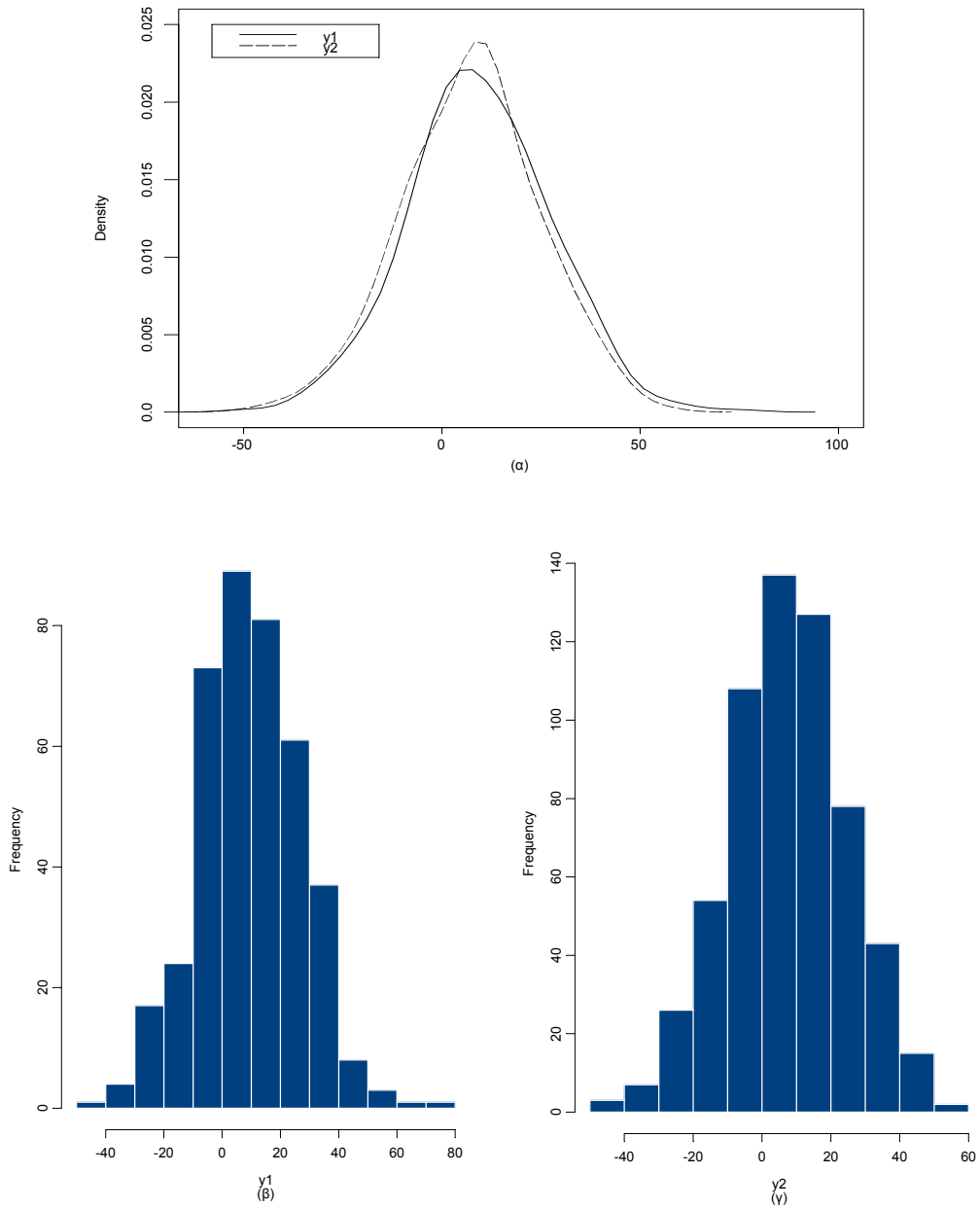
Διάγραμμα 4.8: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής του μέσου α) μ_1 και β) μ_2, αντίστοιχα.*



Διάγραμμα 4.9: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του log-BF σε σχέση με το C ($1<C<9\cdot 10^7$).*

<u>Παράδειγμα 4.3</u>: Προσομοιωμένα δεδομένα (5)

Προσομοιώνουμε 400 παρατηρήσεις (y_{1i}) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 10, τυπική απόκλιση 17 και 600 παρατηρήσεις (y_{2i}) με μέση τιμή 8, τυπική απόκλιση 17. Για κάθε ομάδα παρατηρήσεων θεωρούμε $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ και θα γίνει ο έλεγχος της ισότητας των μέσων τιμών τους.



Διάγραμμα 4.10: *α) Διαγράμματα πυκνότητας β), γ) Ιστογράμματα των y_1 και y_2 αντίστοιχα για το παράδειγμα 4.3*

Στο διάγραμμα 4.10, παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας και τα ιστογράμματα των μεταβλητών. Πριν γίνει ο έλεγχος της ισότητας των μέσων, θα εξετάσουμε την ισότητα των διασπορών των δύο κατανομών. Για αυτόν τον έλεγχο στο μοντέλο της αρχικής υπόθεσης (βλέπε τύπο 4.2), επιλέγουμε τις παρακάτω κατανομές να εκφράζουν τις εκ των προτέρων πληροφορίες κάθε $\mu_1 \sim N\left(0, 2.5 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 1.67 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG\left(1.01, 0.51\right)$. Για το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης (βλέπε τύπο 4.2), επιλέγουμε για τις εκ των προτέρων πληροφορίες των παραμέτρων τις κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 2.5 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 1.67 \cdot \sigma_2^2\right)$, $\sigma_1^2 \sim IG\left(0.71, 0.21\right)$, $\sigma_2^2 \sim IG\left(0.81, 0.31\right)$. Δηλαδή επιλέξαμε μια αρκετά μεγάλη τιμή για το C=1000, μικρές τιμές για τα α=b=0.01 και αυθαίρετα τιμές για τα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.

Στον πίνακα 4.3 (σελ 98), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 167). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\dfrac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 417.61 > 1, αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.997 άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης, *δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

Στο διάγραμμα 4.11.α, εμφανίζεται γραφικά ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes για τιμές των α, b από 10^{-10} έως 2 και C=1000 όπως κατασκευάστηκαν από τη ρουτίνα *plotbf5.alpha* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 168). Το εύρος των τιμών του λογαρίθμου είναι [6.01 , 14.19], επομένως υποστηρίζεται το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης για όλες τις τιμές των α, b που δοκιμάσαμε.

Στο διάγραμμα 4.11.β, παριστάνεται γραφικά η ευαισθησία του παράγοντα Bayes για τιμές του C από 1 ως 10^6, όταν $a, \beta \to 0$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του είναι (6.19 , 10838.8). Όλες οι τιμές του είναι μεγαλύτερες της μονάδας οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που εξετάσαμε (ρουτίνα *plotbf5.C*, παράρτημα σελ 169).

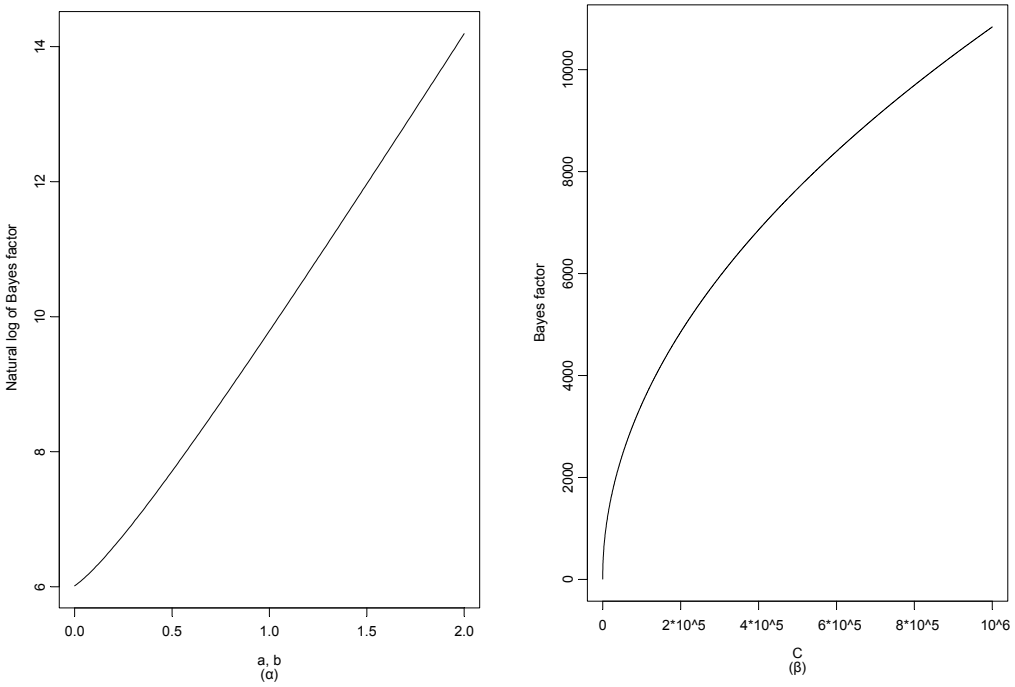
Κάτω από την παραδοχή της ισότητας των διασπορών, θα ελεγχθεί η ισότητα των μέσων των δύο δειγμάτων, δεδομένου ότι η διασπορά τους είναι ίση με σ^2=289.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu \ \text{ έναντι } \mathbf{H_1}: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

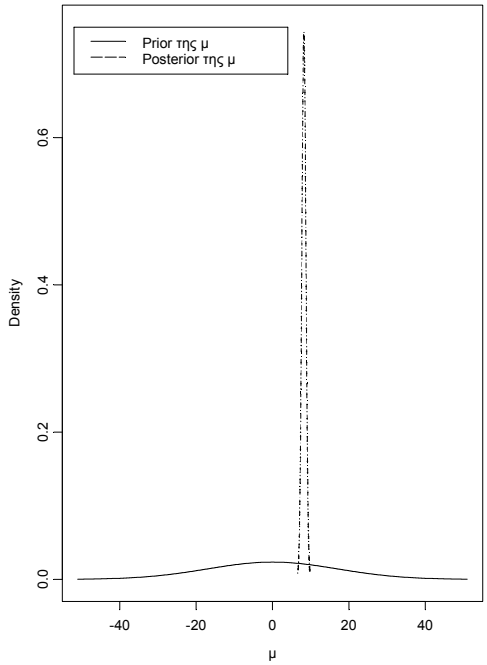
Τα μοντέλα που αντιστοιχούν σε κάθε υπόθεση που καθώς και οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τους τύπους 4.6, 4.7, 4.8, αντίστοιχα. Οι εκ των προτέρων κατανομές που επιλέγουμε για τις παραμέτρους κάθε μοντέλου είναι $\mu \sim N(0,289)$, $\mu_1 \sim N(0,722.5)$, $\mu_2 \sim N(0,481.7)$. Θεωρήσαμε εκ των προτέρων μέσο για όλες τις κατανομές το μηδέν, θέσαμε το $C=n_1+n_2=1000$ και $\sigma^2=289$ δεδομένου ότι ισχύει η ισότητα των διασπορών.

Στον πίνακα 4.4 (σελ. 98), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.2sample.t1* στο S-Plus (βλ παράρτημα σελ. 160). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = 4.53 > 1, αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 0.82, οπότε υπάρχει θετική ένδειξη έναντι του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης. *Άρα οι μέσες τιμές των δύο κατανομών θεωρούνται ίσες*, οι εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου μ που δίνεται από το θεώρημα του Bayes (πίνακας 4.5, σελ 98) είναι $\mu\,|\,\boldsymbol{y} \sim N(8.22, 0.288)$, 95% διάστημα αξιοπιστίας [7.17 , 9.28]. Στα διάγραμμα 4.12, εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων κατανομής, αντίστοιχα, της παραμέτρου μ.

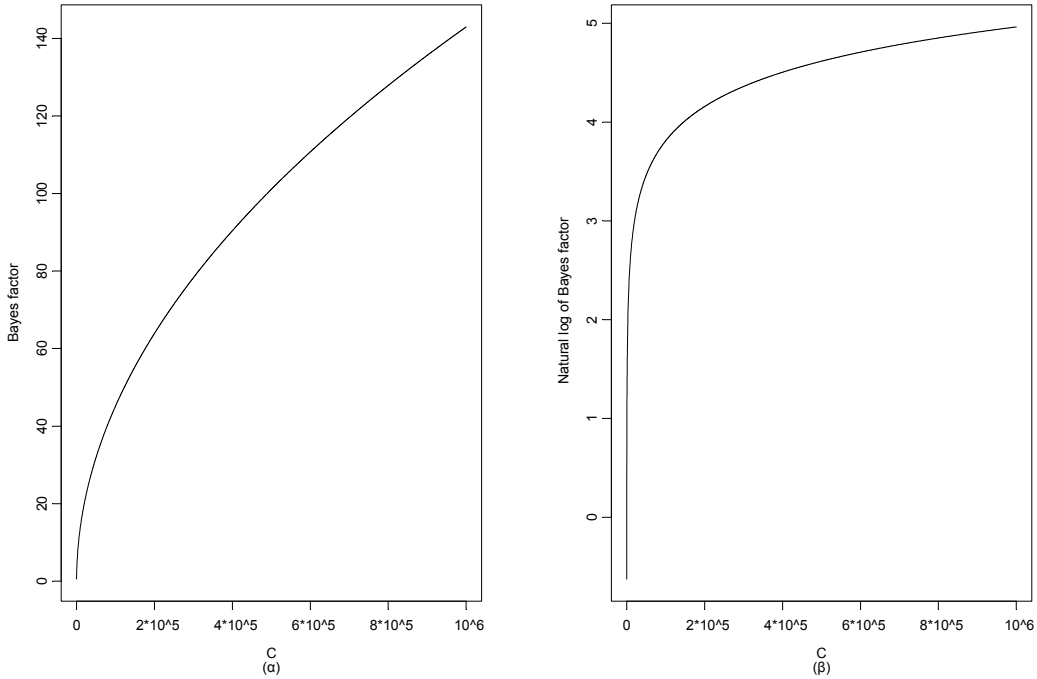
Εξετάσαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές του C. Στο διάγραμμα 4.13, παρουσιάζεται η διακύμανση των τιμών του παράγοντα Bayes και του λογάριθμου του για τιμές του C από 1 ως 10^6. Το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes είναι (0.47 , 142.98) και του λογάριθμου είναι (-0.75 , 4.96). Οι τιμές του C από 1 έως 43 αντιστοιχούν σε τιμές του παράγοντα Bayes μικρότερες της μονάδας (υποστηρίζεται η εναλλακτική υπόθεση) ενώ οι τιμές του C μεγαλύτερες του 44 καταδεικνύουν ένδειξη υπέρ της μηδενικής υπόθεσης. Παρατηρούμε ότι όσο οι τιμές του C αυξάνεται, δηλαδή αυξάνεται η διασπορά της εκ των προτέρων κατανομής της παραμέτρου μ, τότε υποστηρίζεται πιο ισχυρά το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης.



Διάγραμμα 4.11*: Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF σε σχέση με τα α,b (10^{-10}<α,b< 2) και (β) του BF σε σχέση με το C (1< C < 10^6).*



Διάγραμμα 4.12: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων κατανομής του μέσου μ*

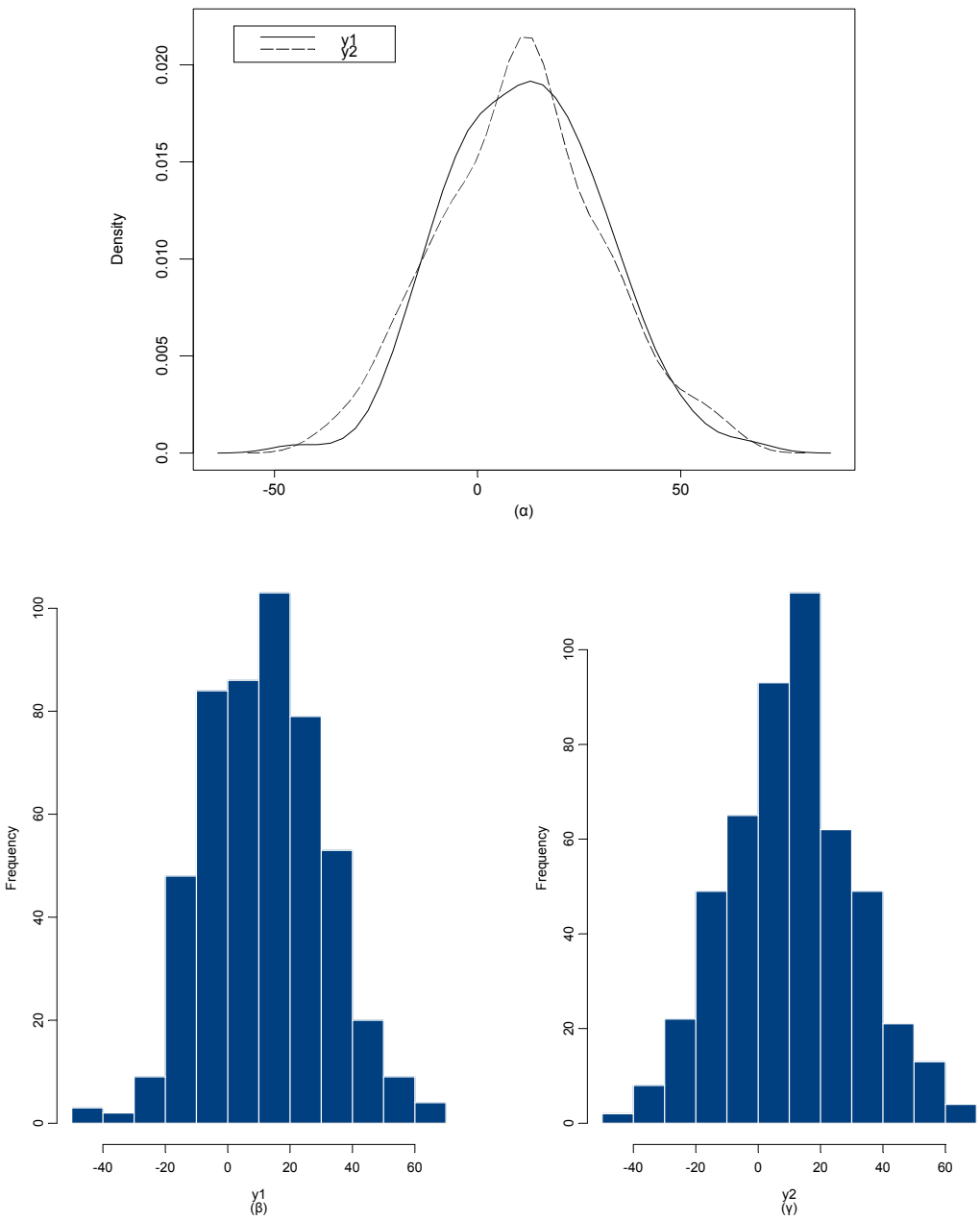


Διάγραμμα 4.13: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) BF και (β) του log-BF σε σχέση με το C (1< C < 10^6).*

<u>*Παράδειγμα 4.4*</u>: *Προσομοιωμένα δεδομένα (6)*

Προσομοιώνουμε 500 παρατηρήσεις (y_{1i}) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 12, τυπική απόκλιση 20 και 500 παρατηρήσεις (y_{2i}) με μέση τιμή 9, τυπική απόκλιση 20. Στο διάγραμμα 4.14, παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας και τα ιστογράμματα των μεταβλητών.

Οι παρατηρήσεις προέρχονται από κανονικές κατανομές με ίσες διασπορές, οπότε θεωρούμε $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ και θα ελέγξουμε την ισότητα των διασπορών των δύο δειγμάτων.



Διάγραμμα 4.14: *α) Διαγράμματα πυκνότητας β), γ) Ιστογράμματα των παρατηρήσεων y_1 και y_2 του παραδείγματος 4.4.*

Για το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης και τις άγνωστες υπό εκτίμηση παραμέτρους μ_1, μ_2, σ^2, επιλέγουμε τις παρακάτω εκ των προτέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma^2\right)$ και $\sigma^2 \sim IG(1.01, 0.51)$. Στο μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για τις παραμέτρους μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma_2^2\right)$, $\sigma_1^2 \sim IG(0.76, 0.26)$,

$\sigma_2^2 \sim IG(0.76, 0.26)$. Δηλαδή επιλέξαμε C=1000 ως μια αρκετά μεγάλη τιμή για το, μικρές τιμές για τα α=b=0.01 και αυθαίρετα τιμές για τα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.

Στον πίνακα 4.3 (σελ. 98), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από την αντίστοιχη ρουτίνα στο S-Plus (*bayesnormal.var*). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\frac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)}$ = 168.39 > 1, αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 0.994 άρα *υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης, δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

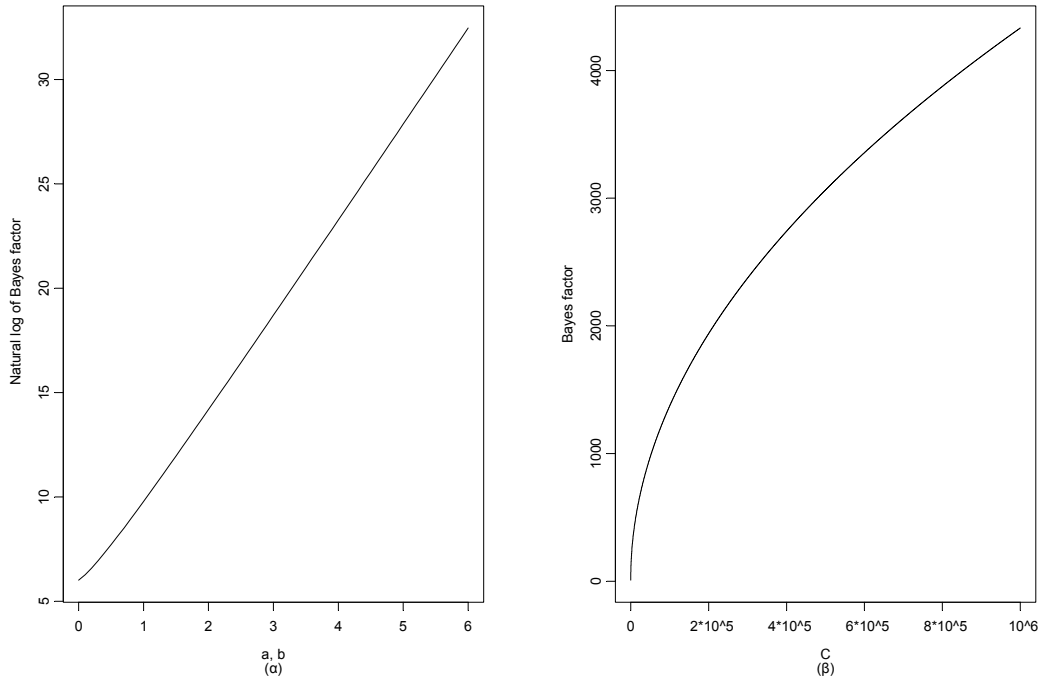
Στο διάγραμμα 4.15.α, εμφανίζεται το γράφημα της ευαισθησίας του λογάριθμου του παράγοντα Bayes όταν τα α, b παίρνουν τιμές από 10^{-10} έως 6, στην περίπτωση όπου α = b. Το εύρος των τιμών του λογαρίθμου είναι [17.99 , 44.59], επομένως υποστηρίζεται το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης για όλες τις τιμές των α, b.

Επιπλέον, θα εξετάσουμε την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes ως προς τις τιμές του C. Στο διάγραμμα 4.15.β, παρουσιάζεται ο παράγοντας Bayes για τιμές του C από 1 ως 10^6 (1 έως $(n_1+n_2)^2$), όταν $a = \beta = 10^{-10}$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του είναι (7.98 , 4332.91). Όλες οι τιμές του είναι μεγαλύτερες της μονάδας οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που εξετάσαμε.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ισότητα των μέσων των δύο δειγμάτων. Για τις παραμέτρους μ, μ_1 και μ_2 επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές σύμφωνα με την ενότητα 1.3.3, δηλαδή $\mu \sim N(0,400)$, $\mu_1 \sim N(0,800)$, $\mu_2 \sim N(0,800)$. Θεωρήσαμε εκ των προτέρων μέσο για όλες τις κατανομές το μηδέν, θέσαμε το $C=n_1+n_2=1000$ και $\sigma^2=400$ δεδομένου ότι ισχύει η ισότητα των διασπορών.

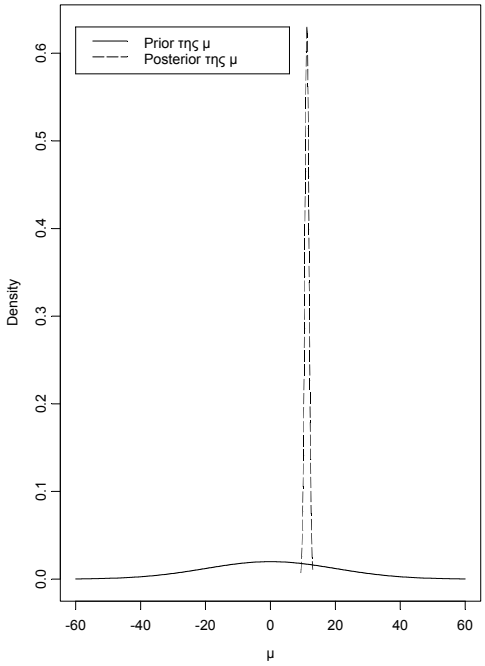
Στον πίνακα 4.4, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από την αντίστοιχη ρουτίνα στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι BF=$\frac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)}$ = 21.25 > 1, υπάρχει ισχυρή ένδειξη έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης. *Άρα οι μέσες τιμές των δύο κατανομών θεωρούνται ίσες* και οι εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου μ που δίνεται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 4.5) είναι $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N(11.21, 0.399)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [9.97 ,

12.45]. Στο διάγραμμα 4.16, εμφανίζονται η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας, αντίστοιχα, για την παράμετρο μ.

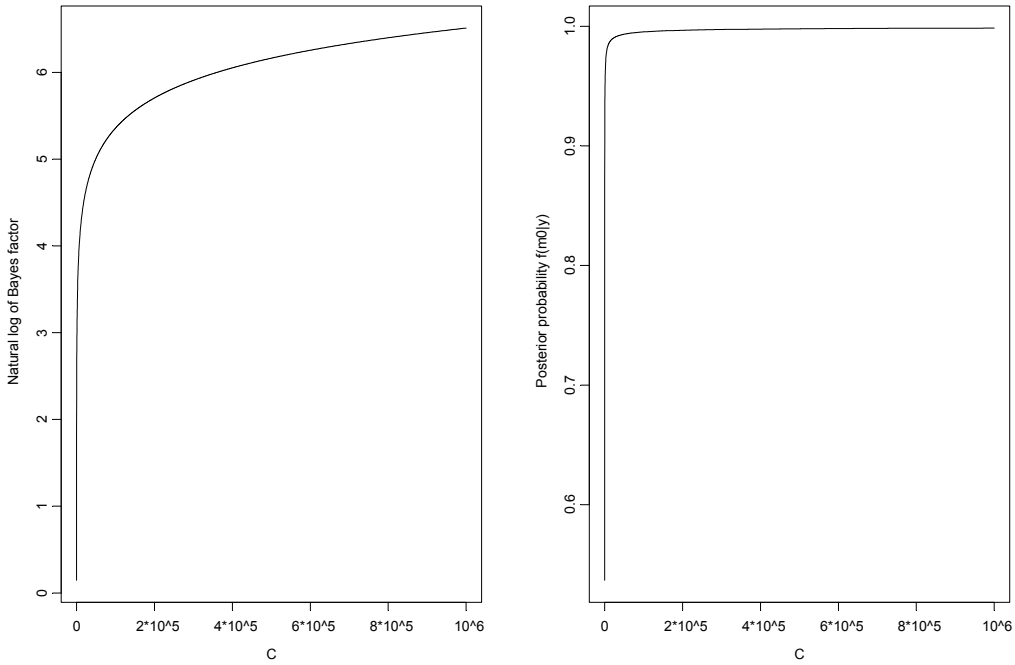


Διάγραμμα 4.15: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του α) log-BF ως προς τις τιμές των α,b (10^{-10} <α,b <6) και β) του BF σε σχέση με το C (1 < C < 10^6).*

Στο διάγραμμα 4.17, παρουσιάζεται η ευαισθησία του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές του C πολύ μικρότερες έως πολύ μεγαλύτερες του n_1+n_2, συγκεκριμένα για τιμές του C από 1 έως 10^6. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (0.15 , 6.51) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.54 , 0.99). Όλες οι τιμές του λογάριθμου είναι μεγαλύτερες του 0 (αντίστοιχα, για της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 μεγαλύτερες του 0.54) οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που εξετάσαμε.



Διάγραμμα 4.16**:** *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής του μέσου μ*



Διάγραμμα 4.17: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1< C <10^6).*

Πίνακες:

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	H_0
Παρ. 4.2	75.43	4.32	0.013	0.987	Ισχυρή	
Παρ. 4.3	417.61	6.03	0.002	0.997	Κατηγορ	
Παρ. 4.4	168.39	5.13	0.006	0.994	Κατηγορ	

Πίνακας 4.3: *Τα αποτελέσματα του έλεγχου της ισότητας διασπορών των παρ. 4.2 - 4.4*
BF_{01}: Παράγοντας Bayes, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, $1/BF_{01}$: Αντίστροφος του παράγοντα Bayes, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, Ε.ε.H_1: Ένδειξη έναντι της H_1, Ε.ε.H_0: Ένδειξη έναντι της H_0.

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	H_0
Παρ. 4.2	$1.45 \cdot 10^{-19}$	-43.34	$6.9 \cdot 10^{18}$	$1.45 \cdot 10^{-19}$		Κατηγορ.
Παρ. 4.3	4.53	1.51	0.221	0.82	Θετική	
Παρ. 4.4	21.25	3.06	0.047	0.95	Ισχυρή	

Πίνακας 4.4: *Αποτελέσματα των ελέγχών της ισότητας των μέσων των παρ. 4.2 - 4.4*
BF_{01}: Παράγοντας Bayes, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, $1/BF_{01}$: Αντίστροφος του παράγοντα Bayes, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, Ε.ε.H_1: Ένδειξη έναντι της H_1, Ε.ε.H_0: Ένδειξη έναντι της H_0.

	Παρ. 4.2		***Παρ 4.3***		***Παρ 4.4***	
	$\tilde{m}$	σ'	$\tilde{m}$	σ'	$\tilde{m}$	σ'
μ	2.88	0.235	8.22	0.537	11.21	0.632
μ_1	4.49	0.288	9.52	0.849	11.78	0.894
μ_2	-0.33	0.408	7.36	0.694	10.65	0.894

Πίνακας 4.5: *Εκ των υστέρων εκτιμήσεις των παραμέτρων των παρ. 4.2 - 4.4*
m': Εκ των υστερών μέσος, σ': Εκ των υστερών σταθερή απόκλιση.

4.1.3 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με ίσες άγνωστες διασπορές.

Έστω δύο δείγματα κανονικής κατανομής $\boldsymbol{y}_1 = (y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n_1})^T$ και $\boldsymbol{y}_2 = (y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2n_2})^T$ με ίσες και άγνωστες διασπορές πλήθους n_1 και n_2 αντίστοιχα. Θα γίνει ο έλεγχος της ισότητας των μέσων τιμών του δείγματος, όπως στην ενότητα 4.1.2. Τα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν τις υποθέσεις που θα ελεγχθούν είναι όμοια με πριν (βλέπε τύπο 4.6) με τη διαφορά ότι το σ^2 είναι άγνωστη προς εκτίμηση παράμετρος.

Για τις παραμέτρου κάθε μοντέλου θα χρησιμοποιήσουμε τις εκ των προτέρων κατανομές που υπολογίσαμε στην ενότητα 1.3.4 με τη βοήθεια των πλασματικών δεδομένων. Έτσι, στο μοντέλο m_0 της μηδενικής υπόθεσης, η προηγούμενη γνώση της παραμέτρου μ θεωρούμε ότι εκφράζεται από την κατανομή $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n_1+n_2}\sigma^2\right)$, ενώ για την παράμετρο σ^2 επιλέγουμε την αντίστροφη γάμμα κατανομή με παραμέτρους α,b ή ισοδύναμα επιλέγουμε για την παράμετρο της ακρίβειας $\tau=\sigma^{-2}$ γάμμα κατανομή με μέσο α/b, δηλαδή $\sigma^2 \sim IG(a,b)$. Οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τον τύπο 4.7. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes, $f(\mu,\sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \mu,\sigma^2) f(\mu,\sigma^2)$ υπολογίζονται οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων

$$\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{2a+n_1+n_2}\left(\frac{\underset{\sim}{m}+\frac{(n_1\bar{y}_1+n_2\bar{y}_2)C}{n_1+n_2}}{1+C}, \frac{\sum(y_{1i}-\bar{y}_1)^2+\frac{n_1(\bar{y}_1-\underset{\sim}{m})^2}{1+C}+\sum(y_{2i}-\bar{y}_2)^2+\frac{n_2(\bar{y}_2-\underset{\sim}{m})^2}{1+C}+\frac{Cn_1n_2(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2}{(1+C)(n_1+n_2)}+2b}{(2\alpha+n_1+n_2)\left(\frac{n_1+n_2}{C}+n_1+n_2\right)}\right)$$

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG\left(\alpha+\frac{n_1+n_2}{2}, b+\frac{\sum(y_{1i}-\bar{y}_1)^2+\frac{n_1(\bar{y}_1-\underset{\sim}{m})^2}{1+C}+\sum(y_{2i}-\bar{y}_2)^2+\frac{n_2(\bar{y}_2-\underset{\sim}{m})^2}{1+C}+\frac{Cn_1n_2(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2}{(1+C)(n_1+n_2)}}{2}\right)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{2a+n_1+n_2}\left(\tilde{m}, \sigma^{2\prime}\right)$ και $\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG\left(a', b'\right)$ οπότε ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας της παραμέτρου μ είναι το $\tilde{m} \pm t_{2a+n_1+n_2}\sigma'$, όπου $\tilde{m}$ είναι ο εκ των υστέρων μέσος και σ' η εκ των

υστέρων τυπική απόκλιση της παραμέτρου μ. Το αντίστοιχο διάστημα αξιοπιστίας της παραμέτρου σ^2 είναι το $P\left(k_1 \le \sigma^2 \le k_2\right) = 1-q$, όπου για τα k_1, k_2 ισχύουν $Gamma_{1/k_1}\left(a',b'\right) = 1-\frac{q}{2}$ και $Gamma_{1/k_2}\left(a',b'\right) = \frac{q}{2}$, όπου a',b' είναι οι εκ των υστέρων τιμές των α, b.

Στο μοντέλο m_1 της εναλλακτικής υπόθεσης, επιλέγουμε τις εκ των προετέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C}{n_1}\sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C}{n_2}\sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(a,b)$ ή ισοδύναμα $\tau = \sigma^{-2} \sim G(a,b)$, ενώ οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τον τύπο 4.8. Μέσω του θεωρήματος του Bayes, $f(\mu_1, \mu_2, \sigma^2 \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y} \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) f(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$ υπολογίζονται οι εκ των υστερών κατανομές των παραμέτρων:

$$\mu_j \mid \boldsymbol{y} \sim t_{2a+n_1+n_2}\left(\frac{\underset{\sim}{m}_j + \bar{y}_j C}{1+C}, \frac{\sum\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)^2 + \frac{n_1\left(\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m}_1\right)^2}{1+C} + \sum\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)^2 + \frac{n_2\left(\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m}_2\right)^2}{1+C} + 2b}{\left(2a+n_1+n_2\right) n_j \frac{(1+C)}{C}}\right),$$

j=1,2

$$\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG\left(\alpha + \frac{n_1+n_2}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)^2 + \frac{n_1}{1+C}\left(\bar{y}_1 - \underset{\sim}{m}_1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)^2 + \frac{n_2}{1+C}\left(\bar{y}_2 - \underset{\sim}{m}_2\right)^2 + 2b}{2}\right)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε $\mu_j \mid \boldsymbol{y} \sim t_{2a+n_1+n_2}\left(\tilde{m}_j, \sigma_j^{2\prime}\right)$, j=1,2 και $\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG\left(a',b'\right)$, οπότε ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας των παραμέτρων μ_1, μ_2 είναι το $\tilde{m}_j \pm t_{2a+n_1+n_2}\sigma_j'$, όπου $\tilde{m}_j, \sigma_j'$ είναι ο εκ των υστέρων μέσος και τυπική απόκλιση αντίστοιχα, κάθε παραμέτρου. Το αντίστοιχο διάστημα της παραμέτρου σ^2 είναι το $P\left(k_1 \le \sigma^2 \le k_2\right) = 1-q$, όπου για τα k_1, k_2 ισχύουν $Gamma_{1/k_1}\left(a',b'\right) = 1-\frac{q}{2}$ και $Gamma_{1/k_2}\left(a',b'\right) = \frac{q}{2}$, όπου a',b' είναι οι εκ των υστέρων τιμές των α, b.

Παράγοντας Bayes

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes για τη σύγκριση του μοντέλου m_0 έναντι του m_1:

$$\mathrm{BF} = \frac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)} =$$

$$\sqrt{1+C}\left(\frac{2b+\sum\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)^2+\frac{n_1\left(\bar{y}_1-\tilde{m}_1\right)^2}{1+C}+\sum\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)^2+\frac{n_2\left(\bar{y}_2-\tilde{m}_2\right)^2}{1+C}}{2b+\sum\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)^2+\frac{n_1\left(\bar{y}_1-\tilde{m}\right)^2}{1+C}+\sum\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)^2+\frac{n_2\left(\bar{y}_2-\tilde{m}\right)^2}{1+C}+\frac{Cn_1n_2\left(\bar{y}_1-\bar{y}_2\right)^2}{\left(1+C\right)\left(n_1+n_2\right)}}\right)^{a+\frac{(n_1+n_2)}{2}}$$

Ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από:

- την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας κάθε δείγματος από τον εκ των προτέρων μέσο κάθε υπόθεσης
- την τετραγωνική απόσταση των δεδομένων από τον αντίστοιχο δειγματικό μέσο
- την τετραγωνική απόσταση των δειγματικών μέσων.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει για την ανάλυση μας, καθώς και από την τιμή της σταθεράς C, δηλαδή τη διασπορά που επιλέξαμε για την εκ των προτέρων κατανομή της μέσης τιμής.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μεγάλη τιμή για το C, δηλαδή μεγάλη διασπορά για την εκ των προτέρων κατανομή των μέσων τιμών, τότε αυξάνεται η τιμή του παράγοντα Bayes, υποστηρίζει πιο ισχυρά τη μηδενική υπόθεση, (καθώς $C \to \infty \Rightarrow BF \to \infty$). Ο Shafer παρατήρησε σχετικά με το παράδοξο του Lindley ότι όταν η εκ των προτέρων διασπορά είναι πολύ μεγαλύτερη της διασποράς του δείγματος η Μπεϋζιανή ανάλυση οδηγεί σε ένδειξη υπέρ της μηδενικής υπόθεσης σε αντίθεση με τα τεστ σημαντικότητας που δείχνουν ένδειξη έναντι σε αυτή (Shafer, 1982).

Ενώ όταν δώσουμε στο C πολύ μικρή τιμή, $C \to 0$ ο παράγοντας Bayes παίρνει την τιμή

$$\mathrm{BF} = \left(\frac{2b+\sum\left(y_{1i}-\underset{\sim}{m}_1\right)^2+\sum\left(y_{2i}-\underset{\sim}{m}_2\right)^2}{2b+\sum\left(y_{1i}-\underset{\sim}{m}\right)^2+\sum\left(y_{2i}-\underset{\sim}{m}\right)^2}\right)^{a+\frac{(n_1+n_2)}{2}}$$

Όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα τις τιμές των εκ των προτέρων μέσων τις αντικαθιστούμε με την τιμή μηδέν, οπότε σε αυτή την περίπτωση ο παράγοντας Bayes παίρνει τιμές πολύ κοντά στη μονάδα. Συνεπώς όταν επιλέγουμε πολύ μικρή εκ των προτέρων διασπορά (σχεδόν μηδενική) τότε δε μπορούμε να έχουμε σημαντική ένδειξη υπέρ κάποιου μοντέλου.

Παράδειγμα 4.5: *Πρόωρος τοκετός*

Ο σκοπός μίας κλινικής έρευνα που διεξήχθη στη γυναικολογική κλινική ενός μεγάλου νοσοκομείου, ήταν να εξετάσει την επίδραση του φαρμάκου Α στον πρόωρο τοκετό. Στην έρευνα αυτή, συμμετείχαν 30 γυναίκες εκ των οποίων 15 συμμετείχαν στην ομάδα που λαμβάνουν το φάρμακο Α και οι υπόλοιπες 15 στην ομάδα που λάμβαναν placebo. Η δόση των φαρμάκων είναι καθορισμένη και δίνονται μεταξύ της 24^{ης} και 28^{ης} εβδομάδας εγκυμοσύνης και για τις δύο ομάδες γυναικών, ενώ οι γυναίκες δε γνώριζαν ποιο από τα δύο φάρμακα λάμβαναν. Η επιλογή των γυναικών σε κάθε ομάδα ήταν τυχαία, για κάθε 2 γυναίκες που ήταν επιθυμητές στην έρευνα, η μία τυχαία επιλεγόταν για την ομάδα των ασθενών κι η άλλη για την ομάδα των μαρτύρων, (Rosner, 1995). Το βάρος των μωρών που γεννά κάθε γυναίκα φαίνονται πίνακα 4.5. Στο διάγραμμα 4.18, παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας, τα ιστογράμματα, καθώς και τα q-q plot κάθε μεταβλητής.

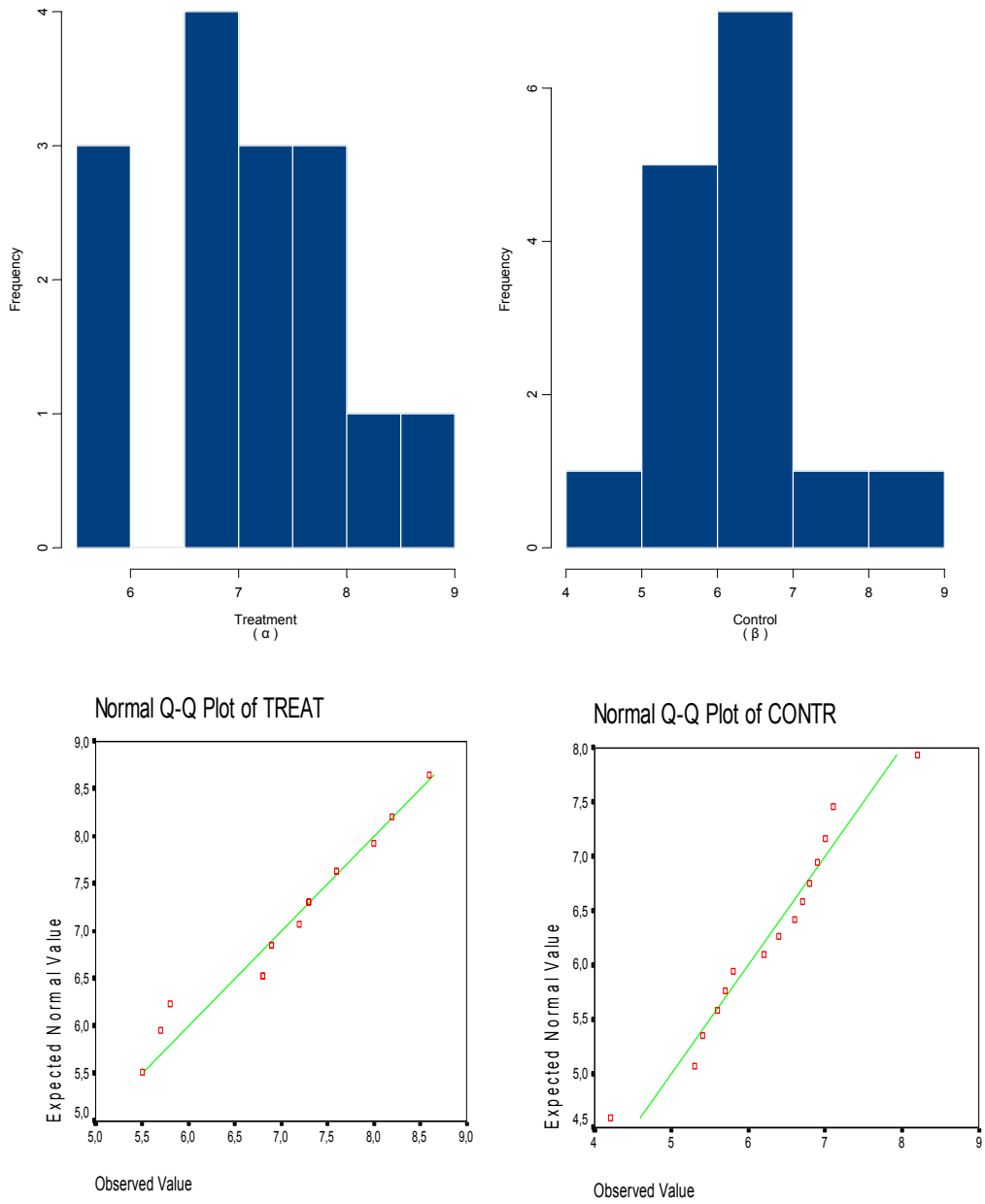
Σκοπός μας είναι να ελέγξουμε αν το μέσο βάρος των μωρών διαφέρει ανάμεσα στις γυναίκες των δύο ομάδων. Τα συγκρινόμενα μοντέλα του έλεγχου υποθέσεων δίνονται από τον τύπο 4.6. Από τα αντίστοιχα q-q plot, διάγραμμα 4.18 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι παρατηρήσεις y_{1i} και y_{2i} κατανέμονται κανονικά $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Πριν τον έλεγχο της ισότητας των μέσων, θα εξετάσουμε την ισότητα των διασπορών των δύο πληθυσμών. Ο έλεγχος υποθέσεων καθώς και τα συγκρινόμενα μοντέλα δίνονται από τους τύπους 4.1 και 4.2.

Ασθενής	*Βάρος των νεογνών των γυναικών που λάμβαναν φάρμακο A*	*Βάρος των νεογνών των γυναικών που λάμβαναν placebo*
1	6.9	6.4
2	7.6	6.7
3	7.3	5.4
4	7.6	8.2
5	6.8	5.3
6	7.2	6.6
7	8.0	5.8
8	5.5	5.7
9	5.8	6.2
10	7.3	7.1
11	8.2	7.0
12	6.9	6.9
13	6.8	5.6
14	5.7	4.2
15	8.6	6.8

Πίνακας 4.6: *Τα βάρη των μωρών που γεννούν οι γυναίκες κάθε ομάδας*

Για τις παραμέτρους του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG\left(1.01, 0.51\right)$. Οι αντίστοιχες κατανομές των παραμέτρων της εναλλακτικής υπόθεσης $\mu_1 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2\cdot\sigma_2^2\right)$, $\sigma_1^2 \sim IG\left(0.76, 0.26\right)$, $\sigma_2^2 \sim IG\left(0.76, 0.26\right)$. Θεωρήσαμε C=30 ως αρκετά μεγάλη τιμή και α=b=0.01 ως αρκετά μικρές τιμές.

Στον πίνακα 4.9 (σελ. 120), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 167). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\dfrac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 6.75 > 1 αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.87, άρα υπάρχει θετική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης, *δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.



Διάγραμμα 4.18: *α), β) Τα ιστογράμματα γ), δ) τα normal q-q plots των παρατηρήσεων του παραδείγματος 4.5*

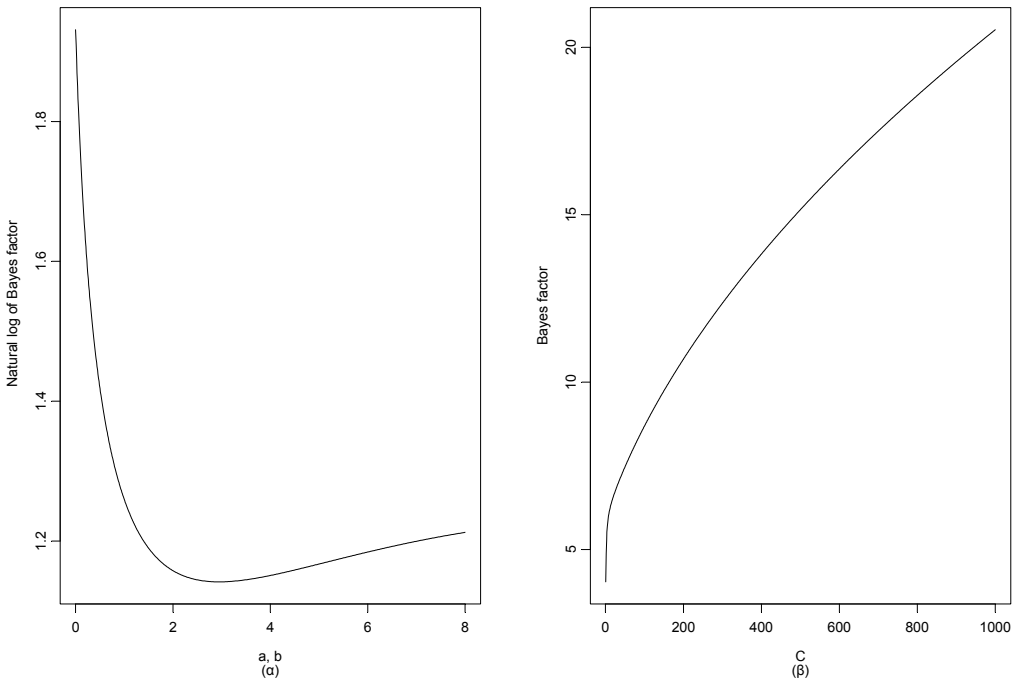
Για την υλοποίηση του ελέγχου της ισότητας των διασπορών των δύο ομάδων παρατηρήσεων, επιλέξαμε για τις εκ των προτέρων πληροφορίες των διασπορών την αντίστροφη Γάμμα κατανομή, με $a = b$. Εξετάσαμε στη συνέχεια, την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές των α, b με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotbf5.alpha* (βλ. παράρτημα σελ 168). Στο διάγραμμα 4.19.α, παριστάνεται γραφικά ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes για τιμές των α, b από 10^{-}

^{10} έως 8. Το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (1.142 , 1.931), οπότε υποστηρίζεται η μηδενική υπόθεση για όλες τις τιμές των α, b που δοκιμάσαμε.

Επιπλέον με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotbf5.C* στο S-PLUS (βλ. παράρτημα σελ. 169) εξετάσαμε την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes για τιμές του C από 1 ως 1000 (1 έως n^2) όταν $a = \beta = 10^{-10}$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$, διάγραμμα 4.19.β. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του είναι (4.04 , 20.53). Όλες οι τιμές του είναι μεγαλύτερες της μονάδας οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που εξετάσαμε.

Κάτω από την παραδοχή της ισότητας των διασπορών, θα ελέγξουμε την ισότητα των μέσων των δύο ομάδων παρατηρήσεων, όμοια με αυτόν της ενότητας 4.1.3. Τα μοντέλα που αντιστοιχούν σε κάθε υπόθεση καθώς και οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τους τύπους 4.6, 4.7, 4.8, αντίστοιχα.

Θεωρούμε ότι η εκ των προτέρων πληροφορία των παραμέτρων του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης, εκφράζεται με τις κατανομές $\mu \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ και $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$. Οι αντίστοιχες κατανομές για το μοντέλο που της εναλλακτικής υπόθεσης είναι οι $\mu_1 \sim N\left(0, 2 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2 \cdot \sigma^2\right)$ και $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$. Προφανώς, θεωρήσαμε C= n_1+n_2 = 30 και θέσαμε τα α=b=0.01 ώστε να εξασφαλίσουμε μη πληροφοριακές εκ των προτέρων κατανομές.

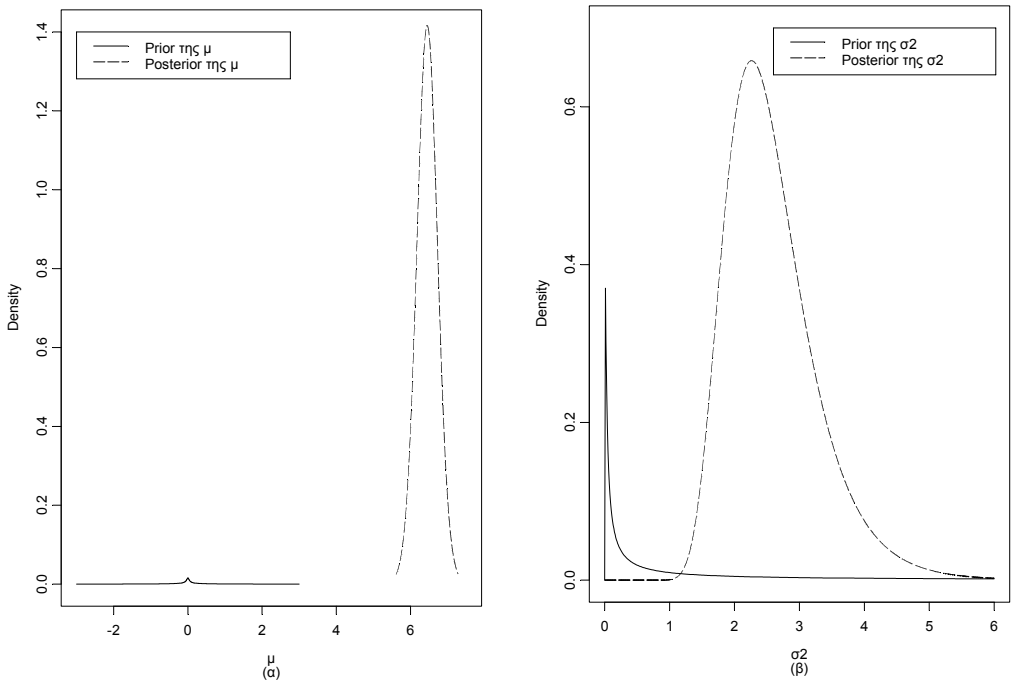


Διάγραμμα 4.19: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του α) log-BF ως προς τις τιμές των α,b (10^{-10} <α,b <8) και β) του BF σε σχέση με το C (1 < C < 1000).*

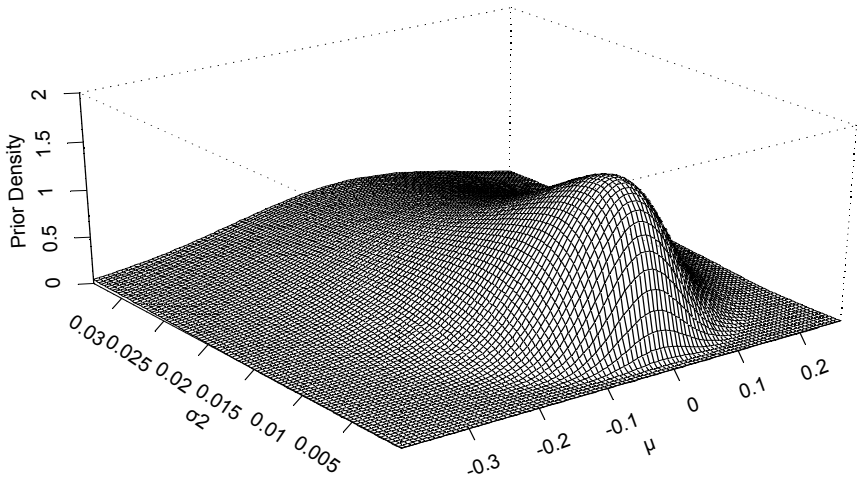
Στον πίνακα 4.10, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.2sample.t2* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 162). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = 1.95 > 1 αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.66 άρα υπάρχει μικρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης που δεν αξίζει παρά μια απλή αναφορά. *Το μέσο βάρος των νεογνών των γυναικών που λάμβαναν το φάρμακο Α δεν διαφέρει σημαντικά από το μέσο βάρος των νεογνών των γυναικών που έπαιρναν placebo*. Συνεπώς, η λήψη του φάρμακου Α από έγκυες γυναίκες δεν προστατεύει από τον πρόωρο τοκετό. Οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων μ, σ^2 όπως υπολογίστηκαν από το θεώρημα του Bayes (βλ πίνακα 4.11) είναι $\mu\,|\,\boldsymbol{y} \sim t_{30.02}(6.45, 0.078)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [5.88 , 7.02] και $\sigma^2\,|\,\boldsymbol{y} \sim IG(15.01, 36.2)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [1.54 , 4.31].

Η εκ των προτέρων κατανομή που επιλέξαμε για την παράμετρο μ είναι δεσμευμένη ως προς σ^2, έτσι ολοκληρώνοντας την από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των δύο παραμέτρων ως προς σ^2 καταλήγουμε στην κατανομή της μ που είναι ανεξάρτητη του σ^2, $\mu \sim t_{2a}\left(m, \frac{C}{n_1+n_2}\frac{b}{a}\right)$. Στο διάγραμμα 4.20.α, παρουσιάζεται η πυκνότητα πιθανότητας της εκ των προτέρων $\mu \sim t_{0.02}(0,1)$ (θέτουμε C=30, α=b=0.01) και της εκ των υστέρων κατανομής της μ, $\mu\,|\,\boldsymbol{y} \sim t_{30.02}(6.45, 0.078)$ και στο διάγραμμα 4.20.β οι αντίστοιχες κατανομές της παραμέτρου σ^2. Εναλλακτικά, παρουσιάζουμε το διάγραμμα 4.21, όπου φαίνεται το γράφημα της από κοινού εκ των προτέρων κατανομής των παραμέτρων μ και σ^2.

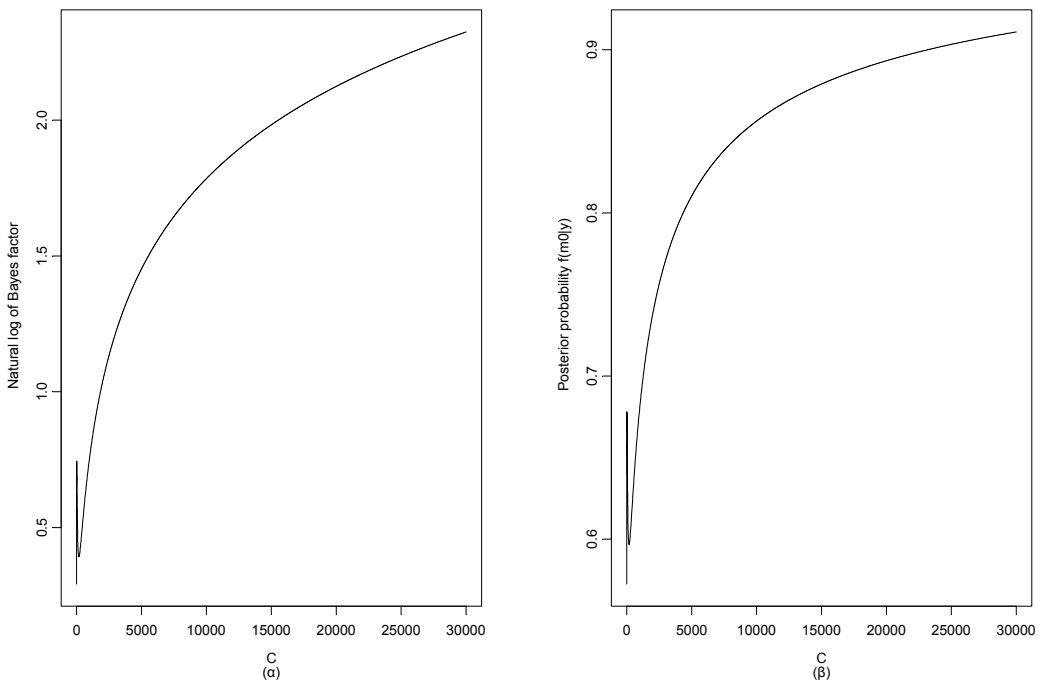
Τέλος, εξετάσαμε τη διακύμανση των τιμών του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές των C. Στο διάγραμμα 4.22, παριστάνεται ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για C από 1 ως 30000 (1 έως n^3). Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (0.29 , 2.32) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.57 , 0.91). Όλες οι τιμές του λογάριθμου είναι μεγαλύτερες του μηδενός (αντίστοιχα, της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 μεγαλύτερες του 0.5) οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που εξετάσαμε (ρουτίνα *plotbf4*, βλ. παράρτημα σελ. 163).



Διάγραμμα 4.20: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου μ και β) της διασποράς σ^2*



Διάγραμμα 4.21: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομές των παραμέτρων μ, σ^2*



Διάγραμμα 4.22: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1< C < 30000).*

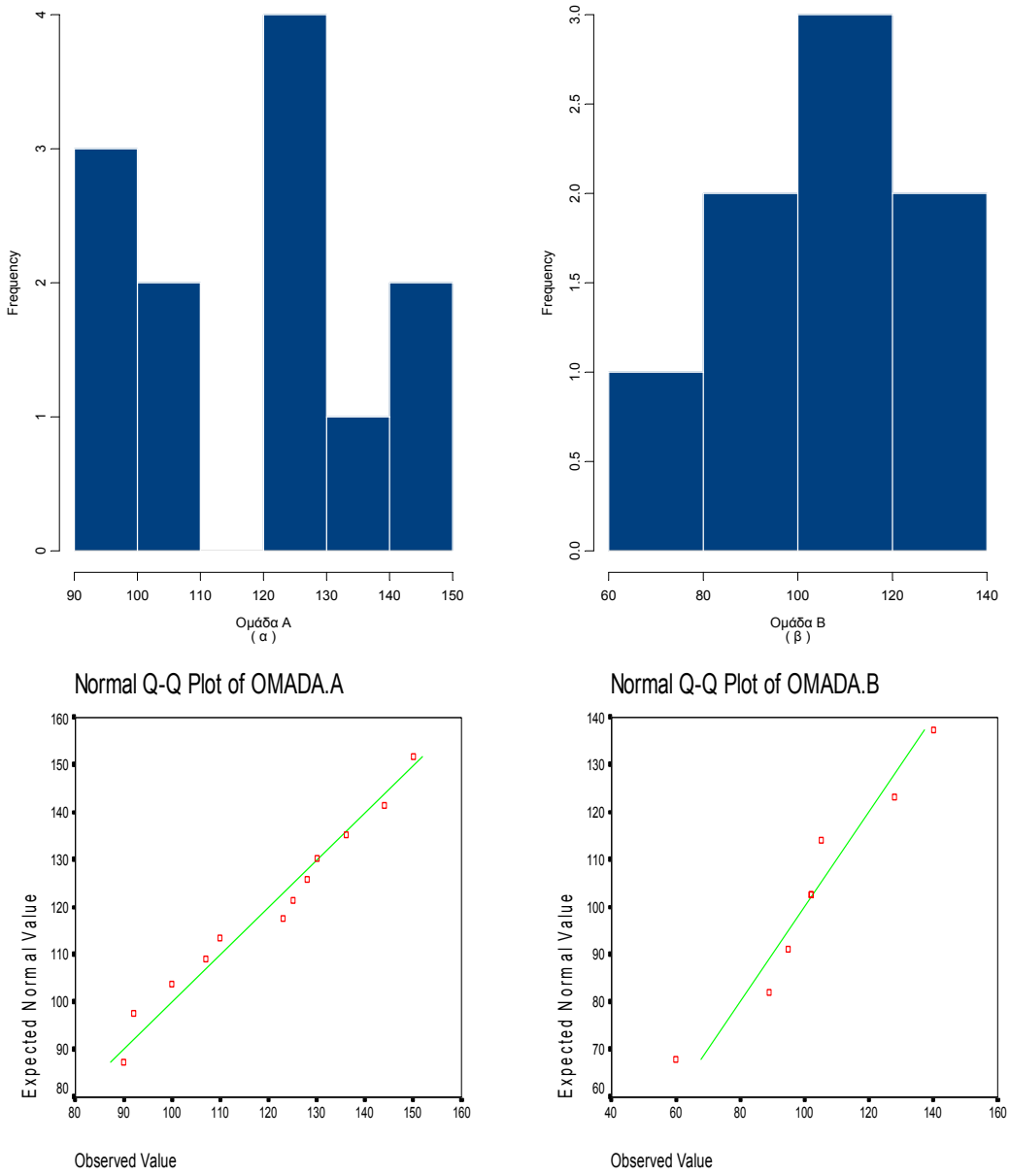
<u>*Παράδειγμα 4.6*</u>: *Σύγκριση βάρους ποντικών*

Σε δύο ομάδες ποντικών χορηγήθηκε για δύο μήνες διαφορετικό είδος τροφής. Οι δύο ομάδες επιλέχθηκαν τυχαία, ενώ τα ποντίκια και των δύο ομάδων είναι ίδιας ηλικίας και φύλου. Στην ομάδα Α χορηγήθηκε διατροφή υψηλής περιεκτικότητας σε πρωτεΐνες, ενώ στην ομάδα Β χαμηλής, (Τζώνου και Κατσουγιάννη, 1997). Στον πίνακα 4.7, δίνεται το βάρος (σε γραμμάρια) που κέρδισαν τα ποντίκια στο διάστημα αυτό και στο διάγραμμα 4.17, παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας, τα ιστογράμματα και το q-q plot κάθε μεταβλητής.

	Ομάδα Α	***Ομάδα Β***
1	136	60
2	144	128
3	100	102
4	123	102
5	128	89

6	150	105
7	107	140
8	90	95
9	110	
10	125	
11	92	
12	130	

Πίνακας 4.7: *Το βάρος που κέρδισαν τα ποντίκια*



Διάγραμμα 4.23: *α), β) Τα ιστογράμματα γ), δ) τα normal q-q plots των παρατηρήσεων του παραδείγματος 4.6*

Θα ελεγχθεί αν το μέσο βάρος που κέρδισαν τα ποντίκια διαφέρει ανάμεσα στις δύο ομάδες. Από τα αντίστοιχα q-q plot, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι παρατηρήσεις y_{1i} και y_{2i} κατανέμονται κανονικά $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Πριν τον έλεγχο της ισότητας των μέσων, θα εξετάσουμε την ισότητα των διασπορών των δύο κατανομών. Ο έλεγχος υποθέσεων καθώς και τα συγκρινόμενα μοντέλα δίνονται από τους τύπους 4.1 και 4.2.

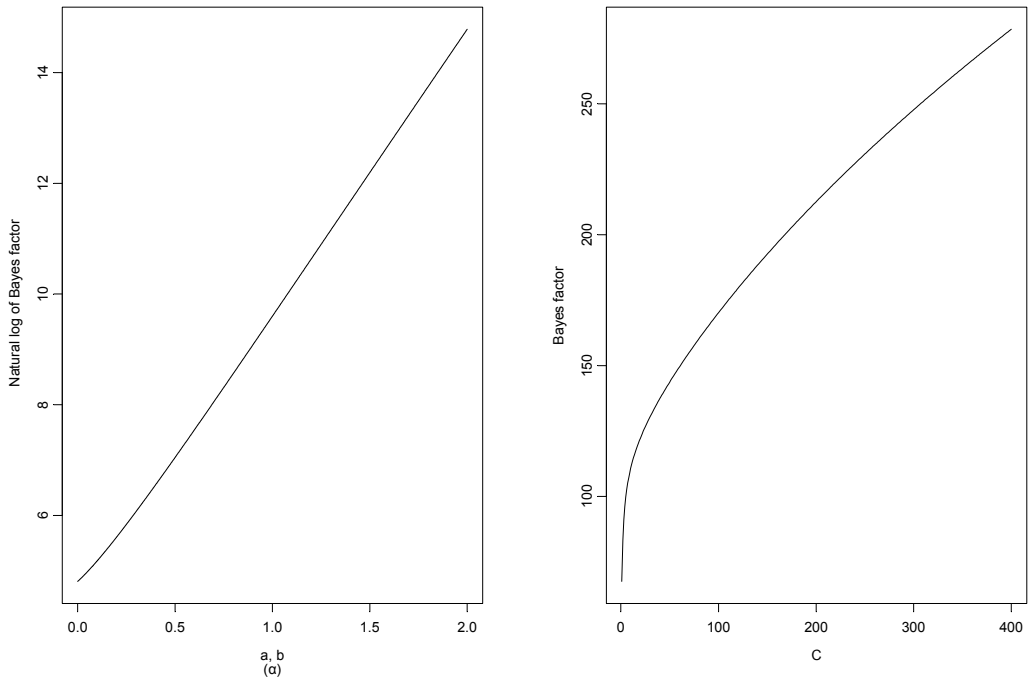
Για τις παραμέτρους του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 1.67 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2.5 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG\left(1.01, 0.51\right)$. Στο μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης, επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές για τις παραμέτρους $\mu_1 \sim N\left(0, 1.67 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 2.5 \cdot \sigma_2^2\right)$, $\sigma_1^2 \sim IG\left(0.81, 0.31\right)$, $\sigma_2^2 \sim IG\left(0.71, 0.21\right)$. Δηλαδή και για τις παραμέτρους και των δύο μοντέλων θεωρήσαμε C=20 ως αρκετά μεγάλη τιμή, α=b=0.01 ως πολύ μικρές τιμές και αυθαίρετες τιμές για τα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.

Στον πίνακα 4.9 (σελ. 120) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 167). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\dfrac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 126.33 > 1 αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.99, άρα υπάρχει ισχυρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης, *δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

Κάτω από την παραδοχή της ισότητας των διασπορών, θα ελεγχθεί η ισότητα των μέσων βαρών ανάμεσα στις δύο ομάδες ποντικών, όμοια με αυτόν της ενότητας 4.1.3. Τα μοντέλα που αντιστοιχούν σε κάθε υπόθεση που καθώς και οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τους τύπους 4.6, 4.7, 4.8, αντίστοιχα. Για τις παραμέτρους του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$, ενώ οι αντίστοιχες κατανομές για τις παραμέτρους του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης είναι $\mu_1 \sim N\left(0, \frac{5}{3} \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, \frac{5}{2} \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα

επιλέξαμε μια αρκετά μεγάλη τιμή για το C= n_1+n_2 = 20 για να εκφράσουμε την αβεβαιότητα μας προς τα πλασματικά δεδομένα και μικρές τιμές για τα α=b=0.01 ώστε να εξασφαλίσουμε μη πληροφοριακές εκ των προτέρων κατανομές.

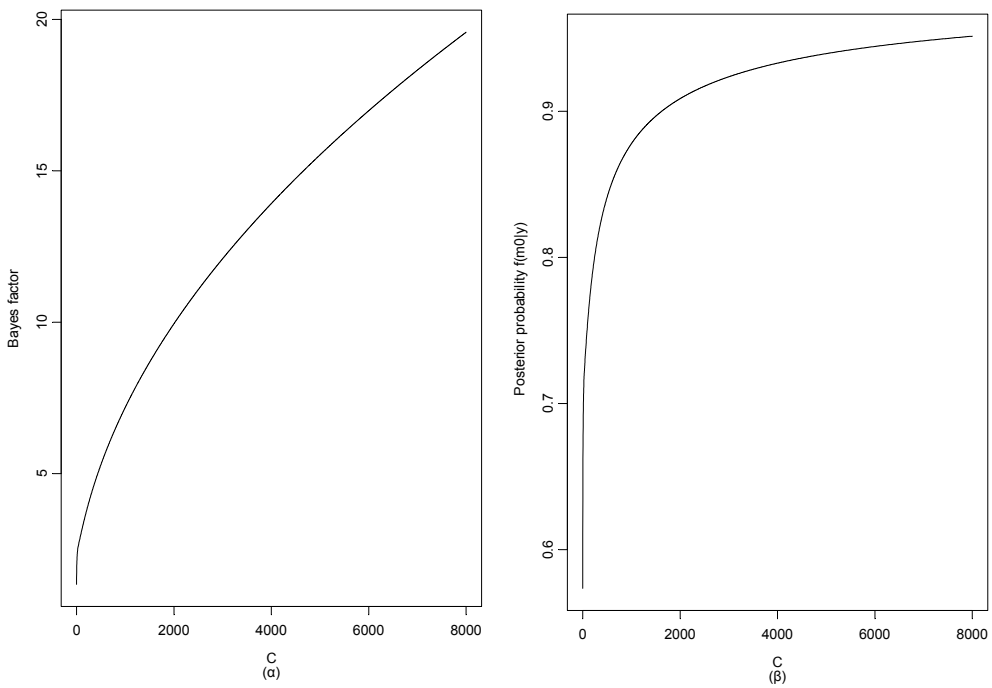
Στον πίνακα 4.10, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.2sample.t2* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 162). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = 2.46 > 1 αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.71 *άρα υπάρχει μικρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης που δεν αξίζει παρά μια απλή αναφορά*. Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για τιμές του C μικρότερες του 20 έως πολύ μεγαλύτερές του. Στο διάγραμμα 4.25, παριστάνεται γραφικά ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 για C από 1 ως 8000 (1 έως n^3). Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes είναι (1.35 , 19.57) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.57 , 0.95). Όλες οι τιμές του λογάριθμου είναι μεγαλύτερες του μηδενός (αντίστοιχα, της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 μεγαλύτερες του 0.5) οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C.



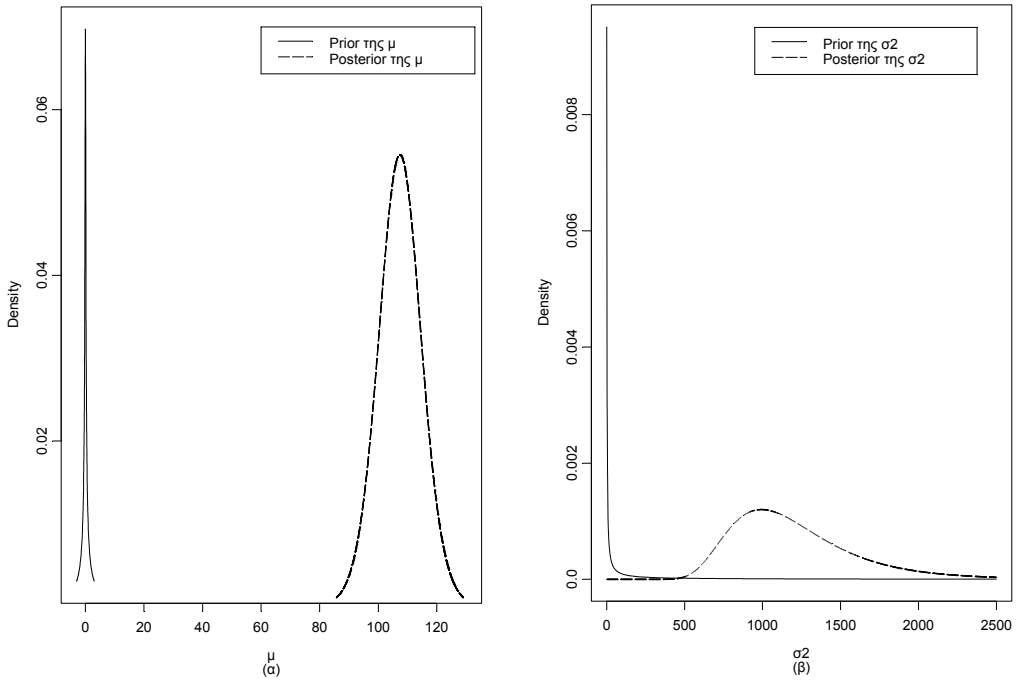
Διάγραμμα 4.24: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF σε σχέση με το α=b (10^{-10} < α,b < 2) και β) BF σε σχέση με το C (1< C < 400).*

Επομένως, το μέσο βάρος που απέκτησαν τα ποντίκια που λάμβαναν τη διατροφή Α δε διαφέρει σημαντικά από το μέσο βάρος που απέκτησαν τα ποντίκια με διατροφή Β. Συνεπώς, η λήψη διατροφής υψηλής περιεκτικότητας σε πρωτεΐνες για δυο μήνες δε δρα σημαντικά στη αύξηση του βάρους των ποντικών. Οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων, όπως υπολογίστηκαν από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 4.11) είναι $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{20.02}(107.4, 52.1)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [92.4 , 122.5] και $\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG(10.01, 10943.6)$, με αντίστοιχο διάστημα [640.1 , 2278.8].

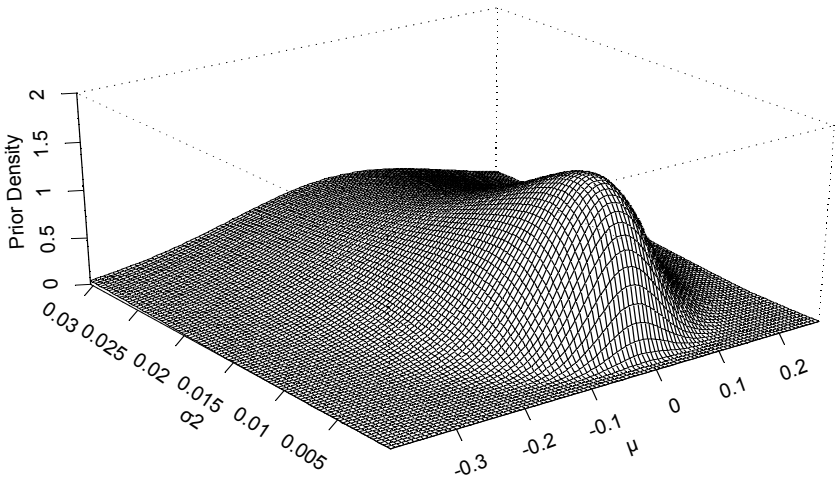
Στο διάγραμμα 4.26.α, παρουσιάζεται η πυκνότητα πιθανότητας της εκ των προτέρων κατανομής της μέσης τιμής που είναι ανεξάρτητη της διασποράς σ^2 $\mu \sim t_{0.02}(0,1)$ και της εκ των υστέρων κατανομής της μ, $\mu \mid \boldsymbol{y} \sim t_{20.02}(107.4, 52.1)$ και στο διάγραμμα 4.26.β οι αντίστοιχες κατανομές της παραμέτρου σ^2. Εναλλακτικά, παρουσιάζουμε το διάγραμμα 4.27, της από κοινού εκ των προτέρων κατανομής των παραμέτρων μ και σ^2.



Διάγραμμα 4.25: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1 < C < 8000).*



Διάγραμμα 4.26: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου μ και β) της διασποράς σ^2*



Διάγραμμα 4.27: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των μ, σ^2.*

Παράδειγμα 4.7: *Δείκτης πνευμονικής λειτουργίας (FEV)*

Σε μία έρευνα που διεξήχθη το 1980 στην ανατολική Βοστόνη της Μασαχουσέτης, σε δείγμα 654 παιδιών ηλικίας 2-19 που έπασχαν από παιδικά αναπνευστικά νοσήματα, καταγράφηκε ο δείκτης FEV (Rosner, 1995). Ο δείκτης πνευμονικής λειτουργίας FEV, είναι ένας δείκτης που μετρά την ένταση του αέρα που εκπνέεται μετά από ένα δευτερόλεπτο σταθερής προσπάθειας. Στον πίνακα 4.8, βλέπουμε την περιγραφή των μεταβλητών του δείγματος, (fev.sav).

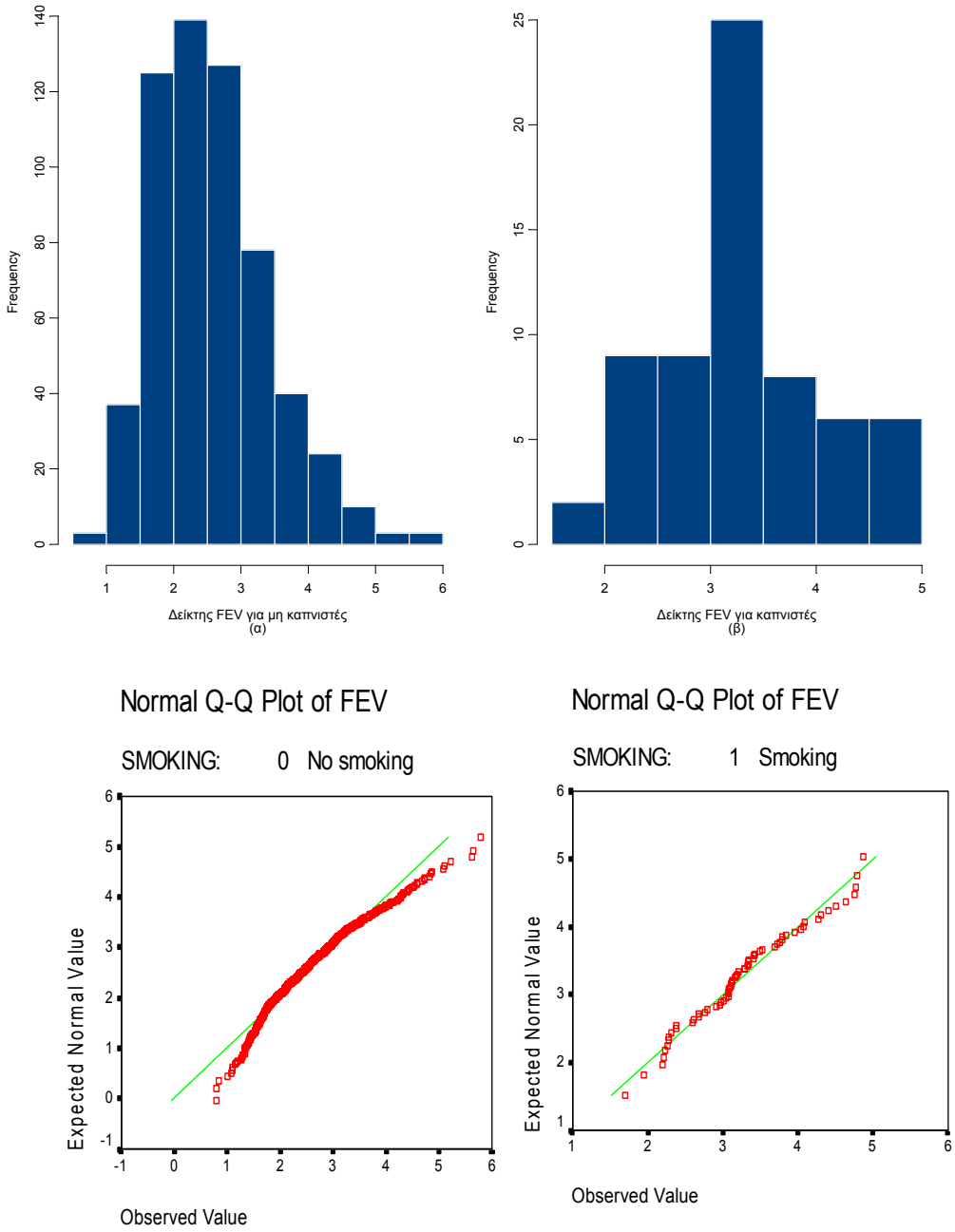
Όνομα	Εξήγηση μεταβλητής
Ασθενής	Κωδικός ασθενή
Ηλικία	Ηλικία (χρόνια)
FEV	FEV (λίτρα)
Ύψος	Ύψος (cm)
Φύλο	Φύλο (0=κορίτσι/1=αγόρι)
Κάπνισμα	Καπνιστική συνήθεια (0=μη καπνιστές/1=καπνιστές)

Πίνακας 4.8*: Στοιχεία των μεταβλητών των δεδομένων FEV*

Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε τη σχέση ανάμεσα στα επίπεδα του δείκτη FEV και το κάπνισμα. Στο διάγραμμα 4.28, παρουσιάζονται τα ιστογράμματα, καθώς και τα q-q plot του δείκτη FEV, για τους καπνιστές και τους μη καπνιστές.

Από τα αντίστοιχα q-q plot, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή του δείκτη FEV κατανέμεται κανονικά στους καπνιστές και τους μη καπνιστές. Επομένως, θεωρούμε δύο ομάδες παρατηρήσεων τους μη καπνιστές $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ πλήθους n1=589 και τους καπνιστές $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ με n_2=65, για τις οποίες θα εξετάσουμε αν τα μέσα επίπεδα του δείκτη FEV διαφέρουν. Πριν προχωρήσουμε στον έλεγχο της ισότητας ων μέσων, θα ελεγχθεί η ισότητα των διασπορών των δύο κατανομών (βλ. τύπους 4.1 και 4.2).

Για τις παραμέτρους του μοντέλου της μηδενική υπόθεσης, επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές για κάθε άγνωστη προς εκτίμηση παράμετρο $\mu_1 \sim N\left(0, 1.11 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 10.06 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG\left(1.01, 0.51\right)$. Οι αντίστοιχες κατανομές για τις παραμέτρους του μοντέλου που αντιστοιχεί στην εναλλακτική υπόθεση είναι: $\mu_1 \sim N\left(0, 1.11 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 10.06 \cdot \sigma_2^2\right)$, $\sigma_1^2 \sim IG\left(0.96, 0.46\right)$, $\sigma_2^2 \sim IG\left(0.56, 0.06\right)$, δηλαδή πήραμε το C=654, τα α=b=0.01 και αυθαίρετες τιμές για τα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.



Διάγραμμα 4.28: *α), β) Τα ιστογράμματα γ), δ) τα normal q-q plots των παρατηρήσεων του παραδείγματος 4.7*

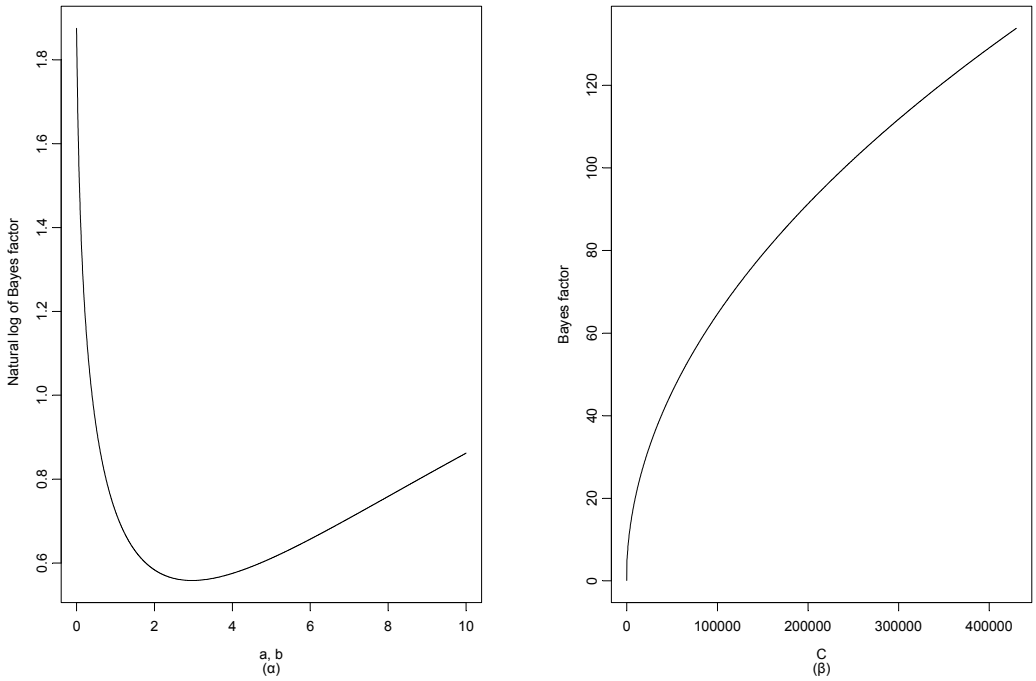
Στον πίνακα 4.9, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 167). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = 6.03>1 αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.86, άρα υπάρχει θετική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης, *δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

Στη συνέχεια με τη βοήθεια της *plotbf5.alpha* (βλ. παράρτημα σελ. 168) εξετάσαμε την ευαισθησία του λογάριθμου του παράγοντα Bayes για τιμές των $a = b$ από 10^{-10} έως 10, διάγραμμα 4.29.α. Παρατηρούμε, ότι για αυτές τις τιμές των α, b το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι [0.56 , 1.88] και όσο παίρνουν τιμές πάνω από 4 αυξάνεται και ο λογάριθμος, οπότε υποστηρίζεται η μηδενική υπόθεση για όλες τις τιμές των α, b. Στο διάγραμμα 4.29.β παριστάνεται το γράφημα του παράγοντα Bayes που κατασκευάζεται με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf5.C* (βλ. παράρτημα σελ. 169) για τιμές του C από 1 ως 430000 όταν $a = \beta = 10^{-10}$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$. Παρατηρούμε ότι για τιμές του C μικρότερες του 4.14 απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ενώ το διάστημα τιμών του C μεγαλύτερο αυτής της τιμής είναι το διάστημα μη απόρριψης της μηδενική υπόθεσης. Δεδομένου ότι επιλέγουμε πάντοτε μεγάλες τιμές για το C ώστε να εκφράζουμε την αβεβαιότητα μας για τα πλασματικά δεδομένα, θεωρούμε τις διασπορές των δύο δειγμάτων ίσες.

Κάτω από την παραδοχή της ισότητας των διασπορών των δύο ομάδων παρατηρήσεων, θα ελέγξουμε αν η μέση τιμή του δείκτη FEV διαφέρει ανάμεσα στους καπνιστές και τους μη καπνιστές. Τα μοντέλα που αντιστοιχούν σε κάθε υπόθεση καθώς και οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας δίνονται από τους τύπους 4.6, 4.7, 4.8, αντίστοιχα. Επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές για τις παραμέτρους του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης $\mu \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$ και για το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης $\mu_1 \sim N\left(0, 1.1 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 10.1 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(0.01, 0.01)$. Όπως προηγούμενα επιλέξαμε C=n_1+n_2=654, α=b=0.01 και αυθαίρετες τιμές για τα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.

Στον πίνακα 4.10, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.2sample.t2* (βλ. παράρτημα σελ. 162). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\dfrac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = 5.33*10^{-8} <1 άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη ότι υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης. *Η μέση τιμή του δείκτη FEV διαφέρει ανάμεσα στους καπνιστές και τους μη καπνιστές*. Οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων, όπως υπολογίστηκαν από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 4.11) είναι $\mu_1 \mid \boldsymbol{y} \sim t_{654.02}\left(2.56, 0.0012\right)$, $\mu_2 \mid \boldsymbol{y} \sim t_{654.02}\left(3.27, 0.011\right)$,

$\sigma^2 \mid \boldsymbol{y} \sim IG(327.01, 234.2)$, με αντίστοιχα 95% διαστήματα αξιοπιστίας [2.49 , 2.63], [3.06 , 3.48], [0.64 , 0.8].

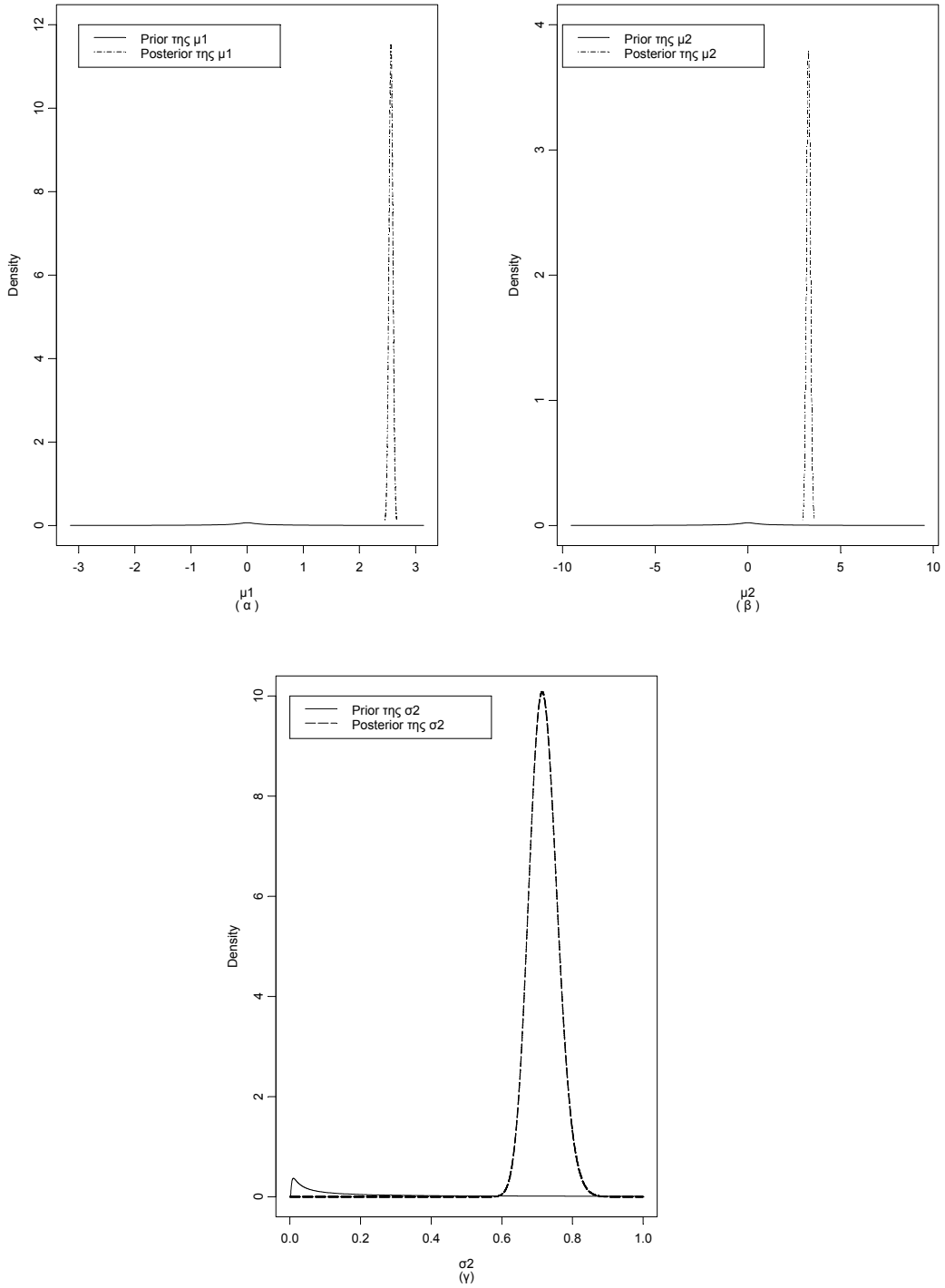


Διάγραμμα 4.29: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF σε σχέση με το α=b (10^{-10} < α,b < 10) και του β) BF σε σχέση με το C (1< C < 4.3*10^5).*

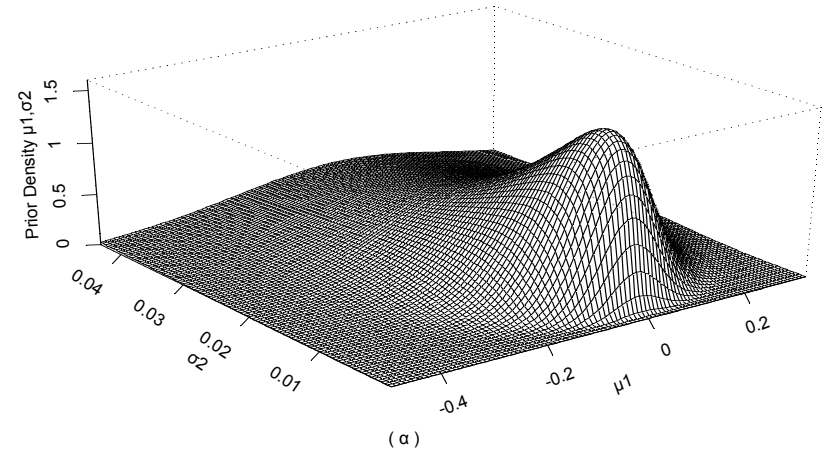
Οι εκ των προτέρων κατανομές που έχουμε επιλέξει για τις μέσες τιμές είναι δεσμευμένες με τις αντίστοιχες διασπορές των δειγμάτων $\left(\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C}{n_1}\sigma^2\right), \mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C}{n_2}\sigma^2\right)\right)$. Έτσι αφού πρώτα υπολογίσουμε τις εκ των προτέρων κατανομές των μέσων τιμών που είναι ανεξάρτητες των διασπορών, θέτοντας ως C=654 και α=b=0.01 καταλήγουμε στις κατανομές $\mu_1 \sim t_{0.02}(0,1.1)$, $\mu_2 \sim t_{0.02}(0,10.1)$. Στο διάγραμμα 4.30 εμφανίζονται οι κατανομές που μόλις υπολογίσαμε και οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων μ_1, μ_2, αντίστοιχα καθώς και οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων πληροφορίας της παραμέτρου σ^2. Εναλλακτικά, παρουσιάζουμε την από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των παραμέτρων μ_1, σ^2 και μ_2, σ^2, στο διάγραμμα 4.31.

Τέλος, εξετάσαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes για τιμές του C από 1 έως $(n_1+n_2)^2$ με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotbf4* (βλ. παράρτημα σελ. 163). Έτσι, στο

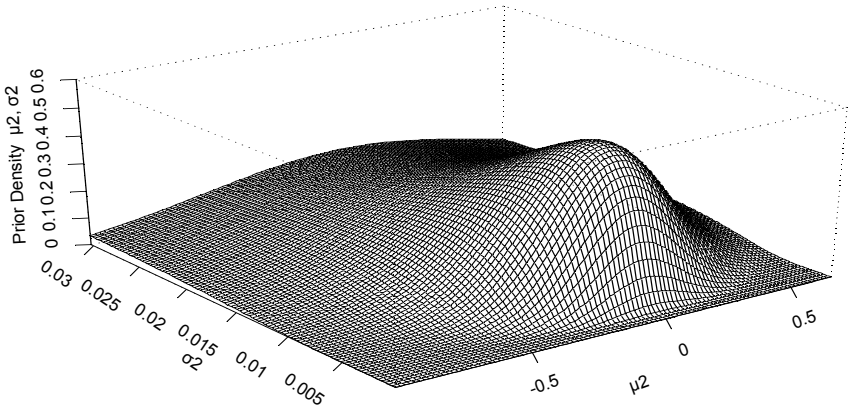
διάγραμμα 4.32, παριστάνεται γραφικά ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes για τιμες C από 1 ως $4.3*10^5$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-16.79 , -1.41). Όλες οι τιμές του λογάριθμου είναι μικρότερες του μηδενός οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που δοκιμάσαμε



Διάγραμμα 4.30: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου μ_1, β) του μέσου μ_2 και γ) της διασποράς σ^2.*

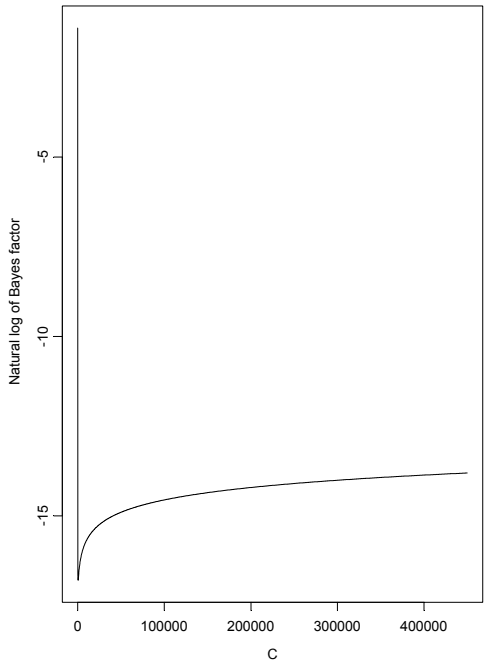


(α)



(β)

Διάγραμμα 4.31: *Από κοινού εκ των προτέρων κατανομή των α)* μ_1, σ^2 *και β)* μ_2, σ^2.



Διάγραμμα 4.32: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του log-BF σε σχέση με το C* ($1<C<4.3*10^5$).

Πίνακες

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	H_0
Παρ. 4.5	6.75	1.909	0.148	0.87	Θετική	
Παρ. 4.6	126.33	4.839	0.008	0.99	Ισχυρή	
Παρ. 4.7	6.03	1.797	0.166	0.86	Θετική	

Πίνακας 4.9: *Τα αποτελέσματα του έλεγχου της ισότητας διασπορών των παρ. 4.5 - 4.7*
BF_{01}: Παράγοντας Bayes, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, $1/BF_{01}$: Αντίστροφος του παράγοντα Bayes, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, Ε.ε.H_1: Ένδειξη έναντι της H_1, Ε.ε.H_0: Ένδειξη έναντι της H_0.

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	H_0
Παρ. 4.5	1.95	0.67	0.512	0.66	Μικρή	
Παρ. 4.6	2.46	0.902	0.406	0.71	Μικρή	
Παρ. 4.7	$5.33*10^{-8}$	-16.75	$1.88*10^{7}$	$5.33*10^{-8}$		Κατηγορ.

Πίνακας 4.10: *Αποτελέσματα των ελέγχών της ισότητας των μέσων των παρ. 4.5 - 4.7*
BF_{01}: Παράγοντας Bayes, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, $1/BF_{01}$: Αντίστροφος του παράγοντα Bayes, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, Ε.ε.H_1: Ένδειξη έναντι της H_1, Ε.ε.H_0: Ένδειξη έναντι της H_0.

	Παρ. 4.5		***Παρ. 4.6***		***Παρ. 4.7***	
	m'	σ'	m'	σ'	m'	σ'
μ	6.45	0.279	107.4	7.22	2.63	0.034
μ_1	6.85	0.381	113.89	9.03	2.56	0.035
μ_2	6.06	0.381	97.74	11.06	3.27	0.105
	α'	b'	α'	b'	α'	b'
$\sigma^2\|m_0$	15.01	35.2	10.01	10943.6	327.01	248.9
$\sigma^2\|m_1$	15.01	33.7	10.01	10286.2	327.01	234.2

Πίνακας 4.11*:* *Εκ των υστέρων εκτιμήσεις των παραμέτρων των παρ. 4.5 - 4.7*
m': Εκ των υστερών μέσος, σ': Εκ των υστερών σταθερή απόκλιση.

4.1.4 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με άνισες γνωστές διασπορές.

Θεωρούμε τα τυχαία δείγματα $\boldsymbol{y}_1 = (y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n_1})^T$ και $\boldsymbol{y}_2 = (y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2n_2})^T$ κανονικής κατανομής με άνισες και γνωστές διασπορές μεγέθους n_1 και n_2. Καλούμαστε να ελέγξουμε την ισότητα των μέσων τιμών των δύο πληθυσμών.

$$\mathbf{H_0}: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu \ \text{ έναντι } \mathbf{H_1}: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

Τα αντίστοιχα μοντέλα που αντιπροσωπεύουν οι παραπάνω υποθέσεις είναι:

$$\mathbf{m_0}: \begin{matrix} y_{1i} \sim N(\mu, \sigma_1^2) \\ y_{2i} \sim N(\mu, \sigma_2^2) \end{matrix} \quad \text{έναντι της } \mathbf{m_1}: \begin{matrix} y_{1i} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \\ y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{matrix}$$

Θεωρούμε ότι η προηγούμενη γνώση της παραμέτρου μ, του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης και των παραμέτρων μ_1, μ_2 του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης, ακολουθούν την κανονική κατανομή, σύμφωνα με την ενότητα 1.3.4.

$$\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right), \ \mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C\sigma_1^2}{n_1}\right), \ \mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας για το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης δίνονται από τον τύπο 4.9, ενώ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης από τον τύπο 4.4 (παρ. 4.1.1), με τη διαφορά ότι εδώ οι διασπορές σ_1^2, σ_2^2 είναι γνωστές παράμετροι.

$$f(y_j \mid \mu, \sigma_j^2, m_0) \propto \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ji} - \mu\right)^2}{2\sigma_j^2}\right), j = 1, 2 \qquad (4.9)$$

Μέσω του θεωρήματος του Bayes υπολογίζονται η εκ των υστερών πληροφορίες για κάθε παράμετρο

$$\mu \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m}\left(\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}\right) + \left(\frac{n_1\overline{y}_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2\overline{y}_2}{\sigma_2^2}\right)C}{\left(\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}\right)(1+C)}, \frac{C}{\left(\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}\right)(1+C)}\right)$$

$$\mu_1 \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m}_1 + \bar{y}_1 C}{1+C}, \frac{C}{1+C}\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\mu_2 \mid \boldsymbol{y} \sim N\left(\frac{\underset{\sim}{m}_2 + \bar{y}_2 C}{1+C}, \frac{C}{1+C}\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Ένα 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας για κάθε μία από τις παραμέτρους είναι το $\tilde{m} \pm z_{q/2}\sigma'$, όπου $\tilde{m}$ είναι ο εκ των υστέρων μέσος και σ' η εκ των υστέρων τυπική απόκλιση της αντίστοιχης παραμέτρου .

Παράγοντας Bayes:

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2) υπολογίζεται ο παράγοντας Bayes του μοντέλου m_0 έναντι του m_1:

$$\frac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)} =$$

$$\sqrt{(1+C)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}\frac{n_1}{(1+C)}\left((\bar{y}_1-\underset{\sim}{m})^2-(\bar{y}_1-\underset{\sim}{m}_1)^2\right)+\frac{1}{\sigma_2^2}\frac{n_2}{(1+C)}\left((\bar{y}_2-\underset{\sim}{m})^2-(\bar{y}_2-\underset{\sim}{m}_2)^2\right)+\frac{n_1 n_2 C}{\left(n_1\sigma_2^2+n_2\sigma_1^2\right)(1+C)}(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2\right]\right\}$$

Ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από

- την τετραγωνική απόσταση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας κάθε δείγματος από τον εκ των προτέρων μέσο κάθε υπόθεσης
- την τετραγωνική απόσταση των δειγματικών μέσων.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τιμή του παράγοντα Bayes εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει για την ανάλυση μας, καθώς και από την τιμή της σταθεράς C.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μεγάλη τιμή για το C, δηλαδή μεγάλη διασπορά για την εκ των προτέρων κατανομή, τότε αυξάνεται εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 (όταν $C \to \infty \Rightarrow BF \to \infty$), (Bartlett, 1982).

Ενώ αν θεωρήσουμε πολύ μικρές τιμές για το $C \to 0$, ο παράγοντας Bayes παίρνει την τιμή

$$\text{BF} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n_1}{\sigma_1^2}\left((\bar{y}_1-\underset{\sim}{m})^2-(\bar{y}_1-\underset{\sim}{m}_1)^2\right)+\frac{n_2}{\sigma_2^2}\left((\bar{y}_2-\underset{\sim}{m})^2-(\bar{y}_2-\underset{\sim}{m}_2)^2\right)\right]\right\}$$

Όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα τις τιμές των εκ των προτέρων μέσων τις αντικαθιστούμε με την τιμή μηδέν, οπότε σε αυτή την περίπτωση ο

παράγοντας Bayes παίρνει τιμές πολύ κοντά στη μονάδα. Συνεπώς όταν επιλέγουμε πολύ μικρή εκ των προτέρων διασπορά (σχεδόν μηδενική) τότε δε μπορούμε να έχουμε σημαντική ένδειξη υπέρ κάποιου μοντέλου.

Παράδειγμα 4.8: *Προσομοιωμένα δεδομένα (7)*

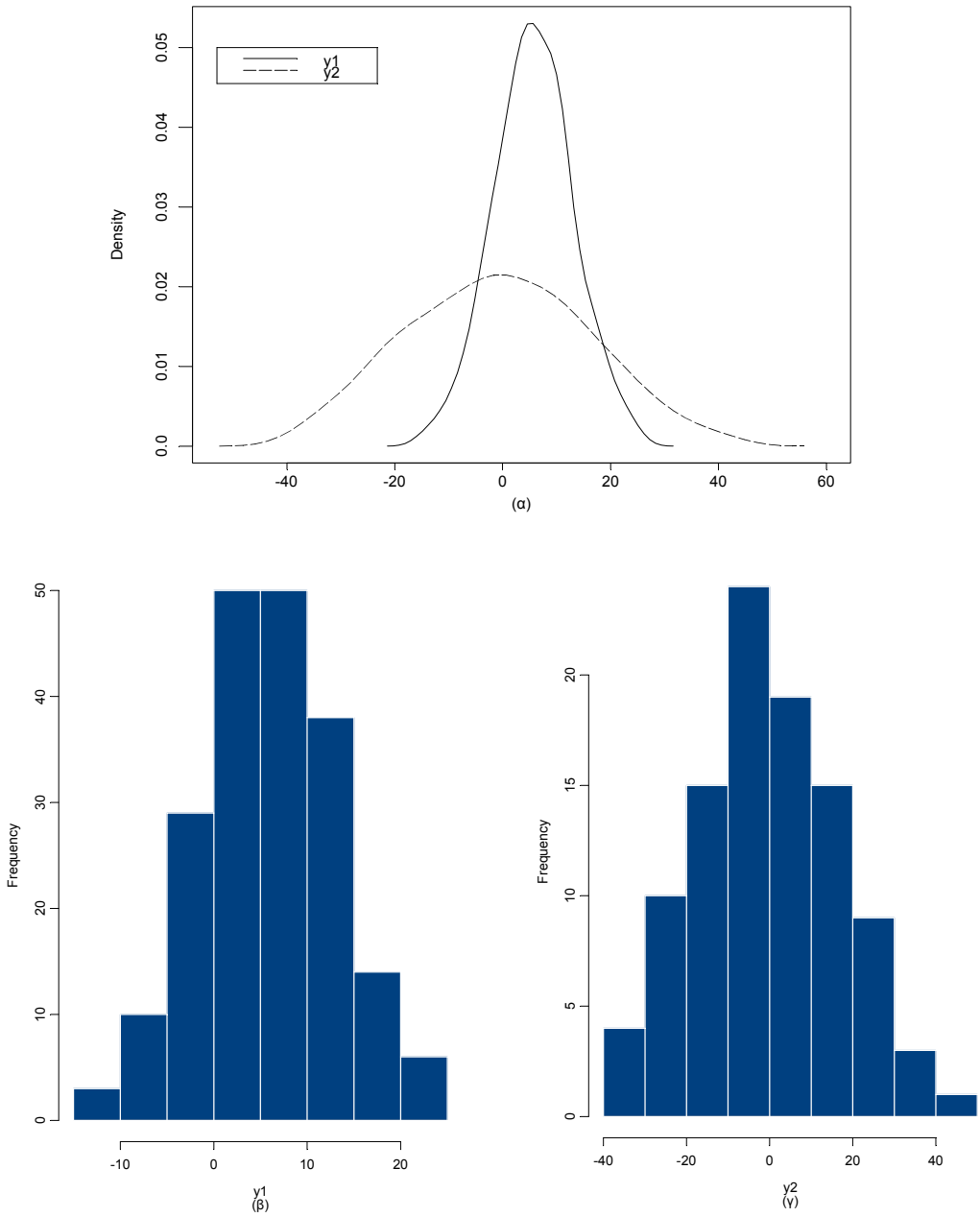
Προσομοιώνουμε 200 παρατηρήσεις (y_{1i}) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 5, τυπική απόκλιση 7 και 100 παρατηρήσεις (y_{2i}) με μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση 17. Στο διάγραμμα 4.33, εμφανίζεται τα γραφήματα πυκνότητας και τα ιστογράμματα των μεταβλητών.

Τα δύο δείγματα προέρχονται από κατανομές με άνισες διασπορές και θεωρούμε $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Πριν προχωρήσουμε στον έλεγχο της ισότητας των μέσων των δύο δειγμάτων, θα εξετάσουμε την ισότητα των διασπορών των δύο κατανομών. Για τις παραμέτρους του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης (τύπος 4.3) επιλέγουμε τις εκ των προτέρων $\mu_1 \sim N\left(0, 1.5 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 3 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG(1.01, 0.51)$, ενώ για το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης (τύπος 4.4) επιλέγουμε τις κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 1.5 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 3 \cdot \sigma_2^2\right)$ $\sigma_1^2 \sim IG(0.84, 0.34)$, $\sigma_2^2 \sim IG(0.68, 0.18)$, δηλαδή C=300, $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$ και α=b=0.01

Στον πίνακα 4.12, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ 167). Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\dfrac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)}$ = $2.61 \cdot 10^{-20} < 1$ άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης, *δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών δε μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

Για τον έλεγχο της ισότητας των διασπορών, θεωρήσαμε την περίπτωση $a = b = 0.01$, ας δούμε τώρα την ευαισθησία του παράγοντα Bayes ως προς τις τιμές των α, b με τη βοήθεια της ρουτίνας *plotbf5.alpha* (βλ. παράρτημα σελ. 168). Στο

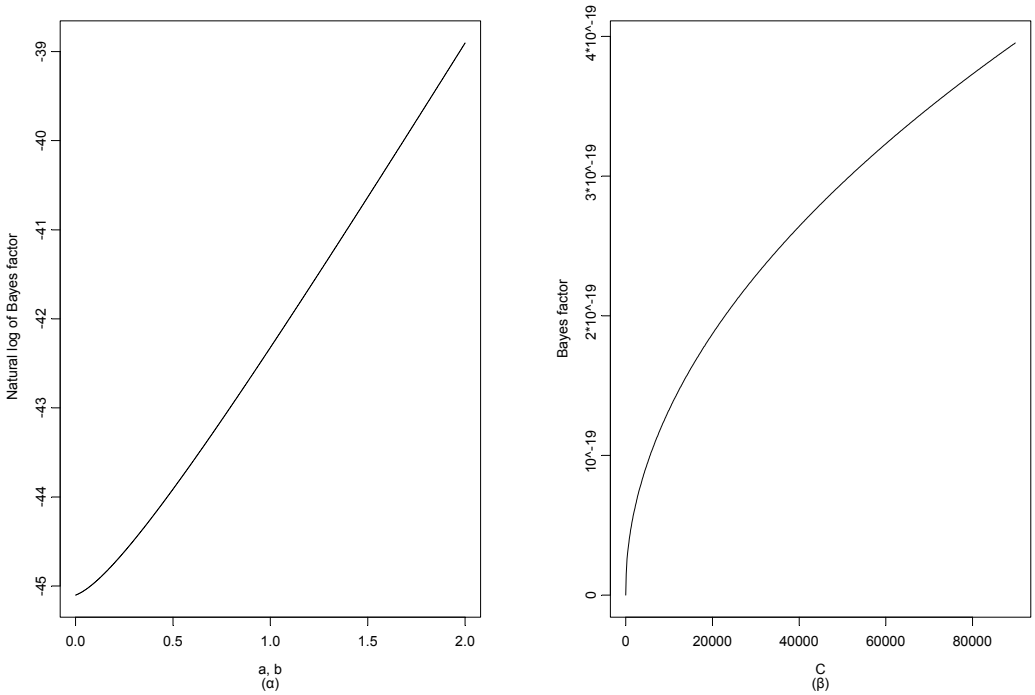
διάγραμμα 4.34.α, παριστάνεται ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes, για τιμές των α, b από 10^{-10} έως 2. Το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-45.1 , -38.9) οπότε για όλες τιμές των α,b που δοκιμάσαμε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.



Διάγραμμα 4.33: *α) Διαγράμματα πυκνότητας β), γ) Ιστογράμματα των παρατηρήσεων του παραδείγματος 4.8*

Επιπλέον, εξετάσαμε την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes σε σχέση με τις τιμές του C (ρουτίνα *plotbf5.C*, παράρτημα σελ. 169). Στο διάγραμμα 4.34.β, παρουσιάζεται ο παράγοντας Bayes για τιμές του C από 1 ως $9 \cdot 10^4$, όταν

$a, \beta \to 0$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του είναι ($3.61 \cdot 10^{-30}$, 3. $59 \cdot 10^{-19}$). Όλες οι τιμές του είναι μεγαλύτερες της μονάδας οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C.



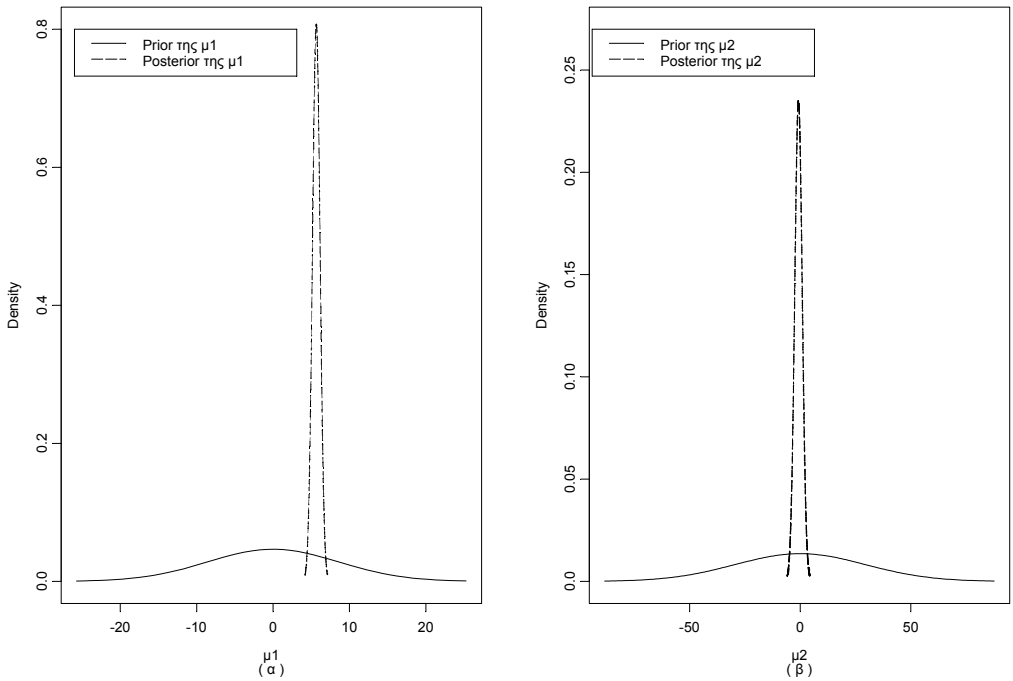
Διάγραμμα 4.34: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF σε σχέση με το α=b (10^{-10} < α,b < 2) και του β) BF σε σχέση με το C (1< C < $9 \cdot 10^4$).*

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, θεωρούμε ότι οι διασπορές των δειγμάτων είναι γνωστές εκ των προτέρων, δηλαδή $\sigma_1^2 = 49$ και $\sigma_2^2 = 289$. Για τον έλεγχο της ισότητας των μέσων, θεωρούμε ότι η εκ των προτέρων πληροφορία για την παράμετρο μ, μ_1, μ_2 εκφράζεται με τις κατανομές $\mu \sim N(0, 67.76)$, $\mu_1 \sim N(0, 73.5)$, $\mu_2 \sim N(0, 867)$, δηλαδή C = n_1+n_2 =300.

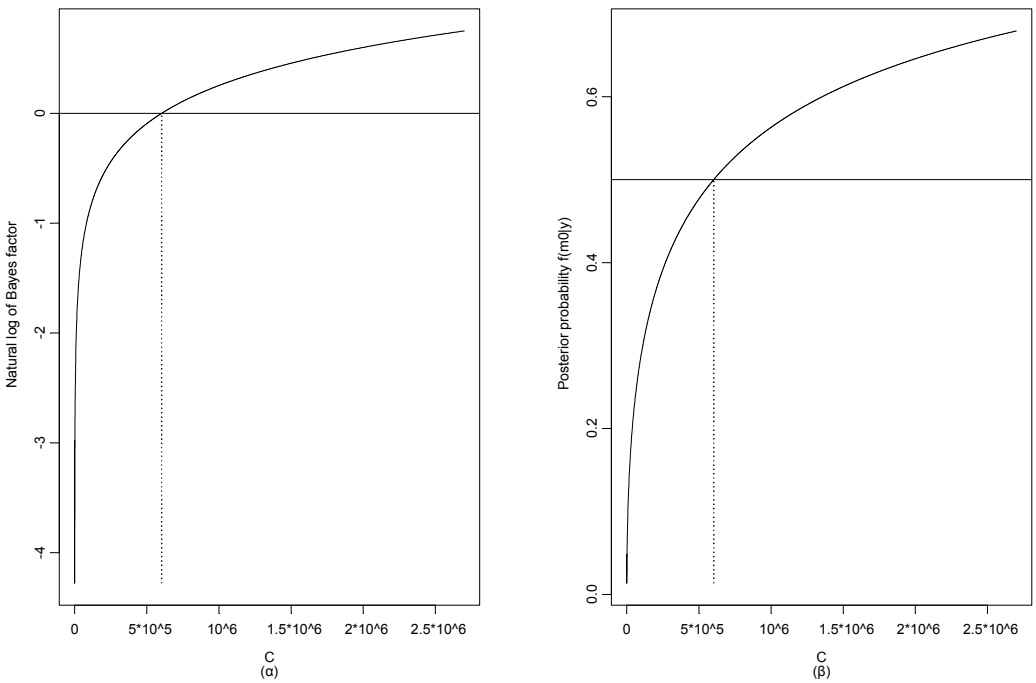
Στον πίνακα 4.13, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από την αντίστοιχη ρουτίνα στο S-Plus. Ο παράγοντας Bayes είναι Bf = $\dfrac{f(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{f(\boldsymbol{y} \mid m_1)}$ = 0.02 <1 αντίστοιχα η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 0.022, άρα υπάρχει ισχυρή ένδειξη ότι απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. *Άρα οι μέσες τιμές των δύο κατανομών δε θεωρούνται ίσες* και οι εκ των υστέρων κατανομές που δίνονται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 4.14) είναι

$\mu_1 \mid \boldsymbol{y} \sim N(5.66, 0.244)$, με 95% διάστημα αξιοπιστίας [4.69 , 6.63] $\mu_2 \mid \boldsymbol{y} \sim N(\text{-}0.78, 2.880)$, αντίστοιχο διάστημα [-4.102 , 2.55]. Στο διάγραμμα 4.35, εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και της εκ των υστέρων πληροφορίας, για κάθε άγνωστη παράμετρο.

Στη συνέχεια, εξετάσαμε την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes για τιμές του C πολύ μικρότερες έως μεγαλύτερες του μεγέθους των δειγμάτων. Στο διάγραμμα 4.361, παρουσιάζονται τα γραφήματα του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές C από 1 ως $27 \cdot 10^5$ (από 1 έως n^3). Το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-4.27 , 0.75) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.014 , 0.68). Οι τιμές της σταθεράς C μεγαλύτερες από 602143 είναι αυτές που αντιστοιχούν σε θετικές τιμές του λογάριθμου (αντίστοιχα μεγαλύτερες του 0.5 για την εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0) δηλαδή είναι το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης.



Διάγραμμα 4.35: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου μ_1 και β) του μ_2.*



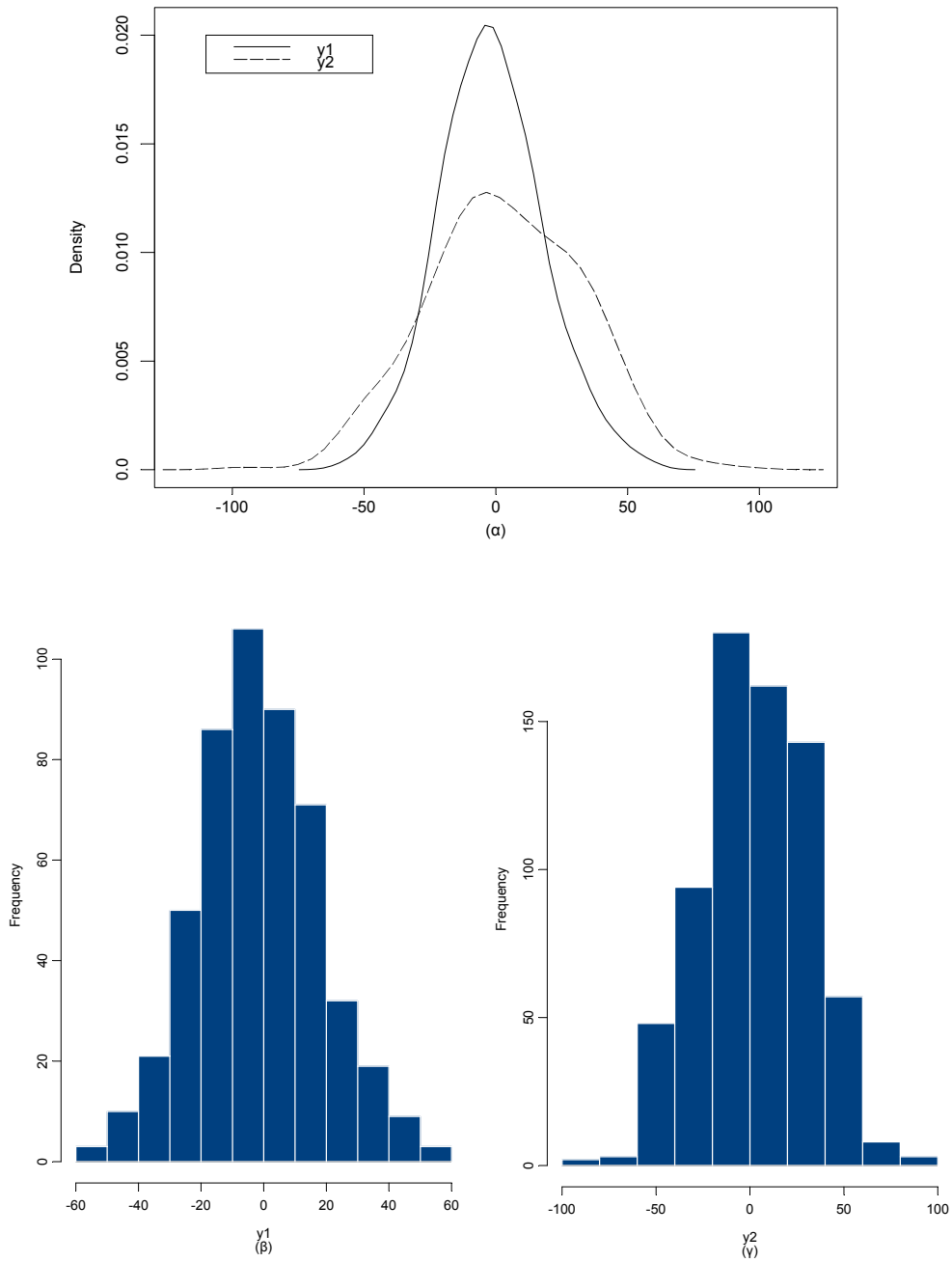
Διάγραμμα 4.36: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C (1< C < 27· 10^5).*

<u>Παράδειγμα 4.9</u>: Προσομοιωμένα δεδομένα (8)

Προσομοιώνουμε 500 παρατηρήσεις (y_{1i}) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση 20 και 700 παρατηρήσεις (y_{2i}) με μέση τιμή 2, τυπική απόκλιση 30. Στο διάγραμμα 4.42, εμφανίζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα πυκνότητας και τα ιστογράμματα των μεταβλητών. Τα δύο δείγματα προέρχονται από κατανομές με άνισες διασπορές και θεωρούμε $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Πριν τον έλεγχο της ισότητας των μέσων των δύο δειγμάτων, θα εξετάσουμε την ισότητα των διασπορών τους.

Για τις παραμέτρους του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης (τύπος 4.3) επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 2.4 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 1.71 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG\left(1.01, 0.51\right)$, ενώ για το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης (τύπος 4.4) επιλέγουμε τις κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 2.4 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 1.71 \cdot \sigma_2^2\right)$,

$\sigma_1^2 \sim IG(0.72, 0.22)$, $\sigma_2^2 \sim IG(0.80, 0.30)$. Δηλαδή θεωρήσαμε C=1200 ως αρκετά μεγάλη τιμή, α=b=0.01 και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.



Διάγραμμα 4.37: *α) Διαγράμματα πυκνότητας β), γ) ιστογράμματα των παρατηρήσεων του παραδείγματος 4.9*

Στον πίνακα 4.12, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 167).

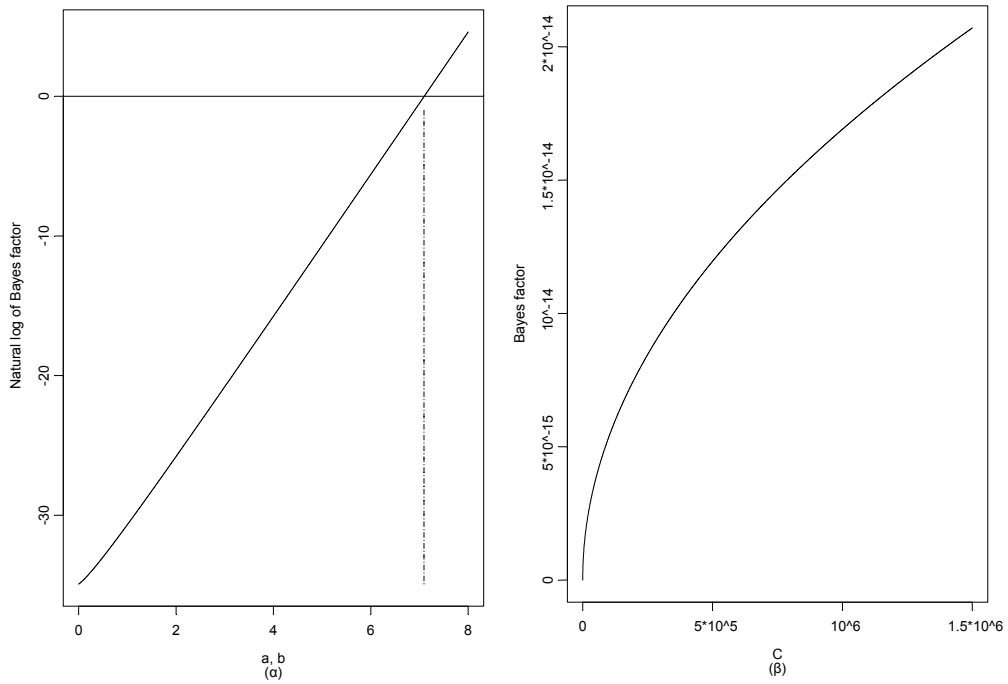
Ο παράγοντας Bayes είναι BF= $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = $6.94\cdot 10^{-16}$ < 1 άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη υπέρ του μοντέλου της εναλλακτικής υπόθεσης, *δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών δε μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

Επιπλέον εξετάσαμε την ευαισθησία του παράγοντα Bayes σε σχέση με τα α,b και με τη τιμή της σταθεράς C. Στο διάγραμμα 4.38.α, παριστάνεται ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes, για τιμές των α = b από 10^{-10} έως 8 και C=1200. Το διάστημα [10^{-10} , 7.09] είναι αυτό που αντιστοιχεί σε αρνητικές τιμές του λογάριθμου, δηλαδή είναι το διάστημα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Με άλλα λόγια για τιμές των α, b εκτός του διαστήματος αυτού δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

Στο διάγραμμα 4.38.β, παρουσιάζεται ο παράγοντας Bayes για τιμές του C από 1 ως $1.5\cdot 10^{6}$ (από 1 έως n^2) όταν $a=\beta=10^{-10}$ και $S_1^{*2}=S_2^{*2}=1$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του είναι ($2.02\cdot 10^{-35}$, $2.07\cdot 10^{-14}$). Όλες οι τιμές του είναι μικρότερες της μονάδας οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της αρχικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που μελετήσαμε. Για τα παραπάνω γραφήματα εφαρμόστηκαν οι ρουτίνες *plotbf5.alpha* και *plotbf5.C* (βλ. παράρτημα σελ. 168, 169) αντίστοιχα.

Θεωρώντας τις διασπορές των δειγμάτων γνωστές $\sigma_1^2=400$ και $\sigma_2^2=900$ θα ελέγξουμε την ισότητα των μέσων. Για τις παραμέτρους μ, μ_1, μ_2 επιλέγουμε την εκ των προτέρων πληροφορία να εκφράζεται με τις κατανομές $\mu\sim N(0,591.78)$, $\mu_1\sim N(0,960)$, $\mu_2\sim N(0,1542.86)$, δηλαδή πήραμε το C= n_1+n_2 =1200.

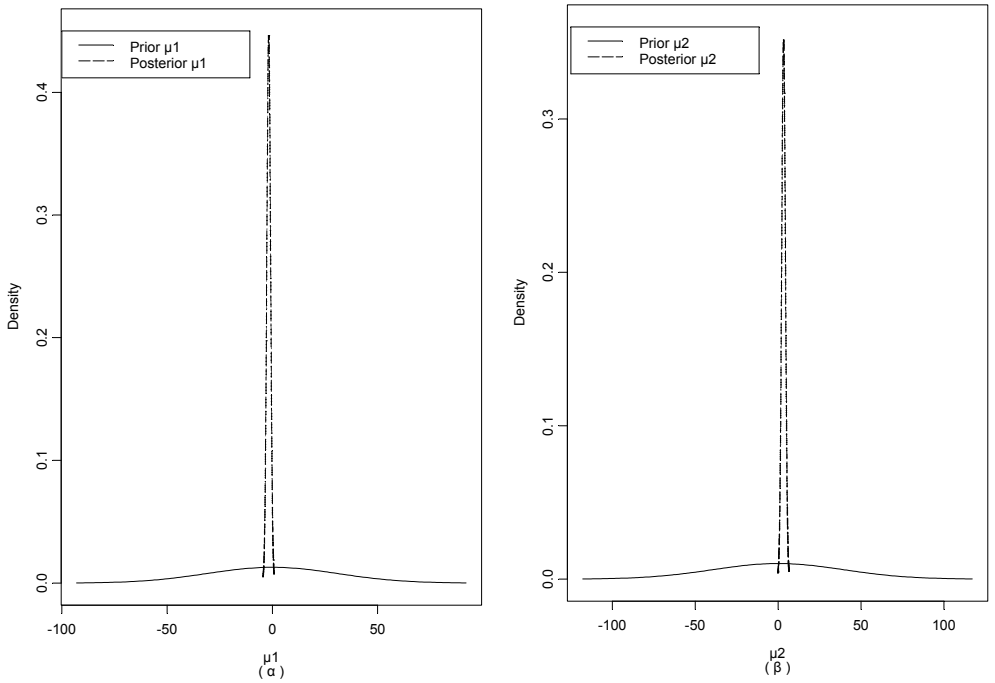
Στον πίνακα 4.13, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου της ισότητας των μέσων, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.2sample.t3* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 164). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\frac{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_0)}{f(\boldsymbol{y}\,|\,m_1)}$ = 0.08 < 1 αντίστοιχα η εκ ων υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 είναι 0.08 άρα υπάρχει θετική ένδειξη ότι απορρίπτουμε το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης.



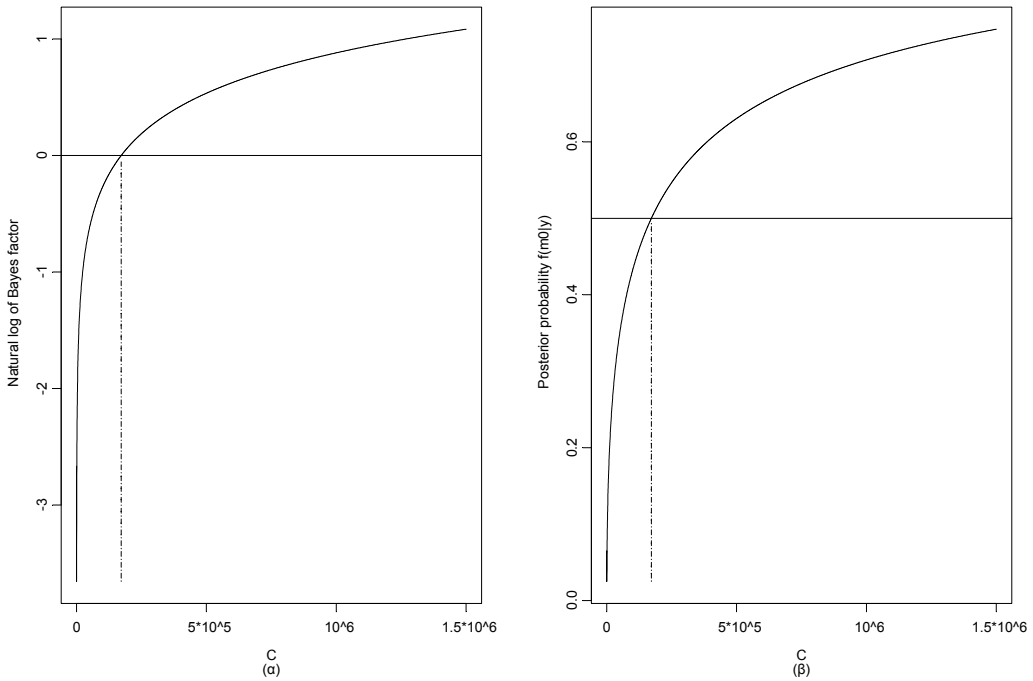
Διάγραμμα 4.38: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF σε σχέση με το α=b ($10^{-10} < \alpha,b < 8$) και του β) BF σε σχέση με το C ($1< C < 1.5\cdot 10^6$).*

Επομένως, οι μέσες τιμές των δύο κατανομών δε μπορούν να θεωρηθούν ίσες και οι εκ των υστέρων κατανομή που δίνεται από το θεώρημα του Bayes (βλ. πίνακα 4.14) είναι $\mu_1 \mid \boldsymbol{y} \sim N(-1.72, 0.799)$ και $\mu_2 \mid \boldsymbol{y} \sim N(3.29, 1.285)$ με 95% διάστημα αξιοπιστίας [-3.47 , 0.03] και [1.07 , 5.51] αντιστοίχως. Στα διαγράμματα 4.39, εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής κάθε παραμέτρου.

Στη συνέχεια, εξετάσαμε την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes ως προς τις τιμές του C όταν αυτές είναι πολύ μικρότερες ή πολύ μεγαλύτερες του μεγέθους του δείγματος, με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf8* στο S-PLUS (βλ. παράρτημα σελ. 166). Στο διάγραμμα 4.40, παρουσιάζονται τα γραφήματα του λογάριθμου του παράγοντα Bayes και της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0 για τιμές C από 1 ως $1.5\cdot 10^6$. Παρατηρούμε ότι το εύρος των τιμών του λογάριθμου είναι (-3.65 , 1.08) και της εκ των υστέρων πιθανότητας του m_0 (0.03 , 0.75). Η τιμή του C = 171621, είναι οριακή τιμή πάνω από την οποία δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.



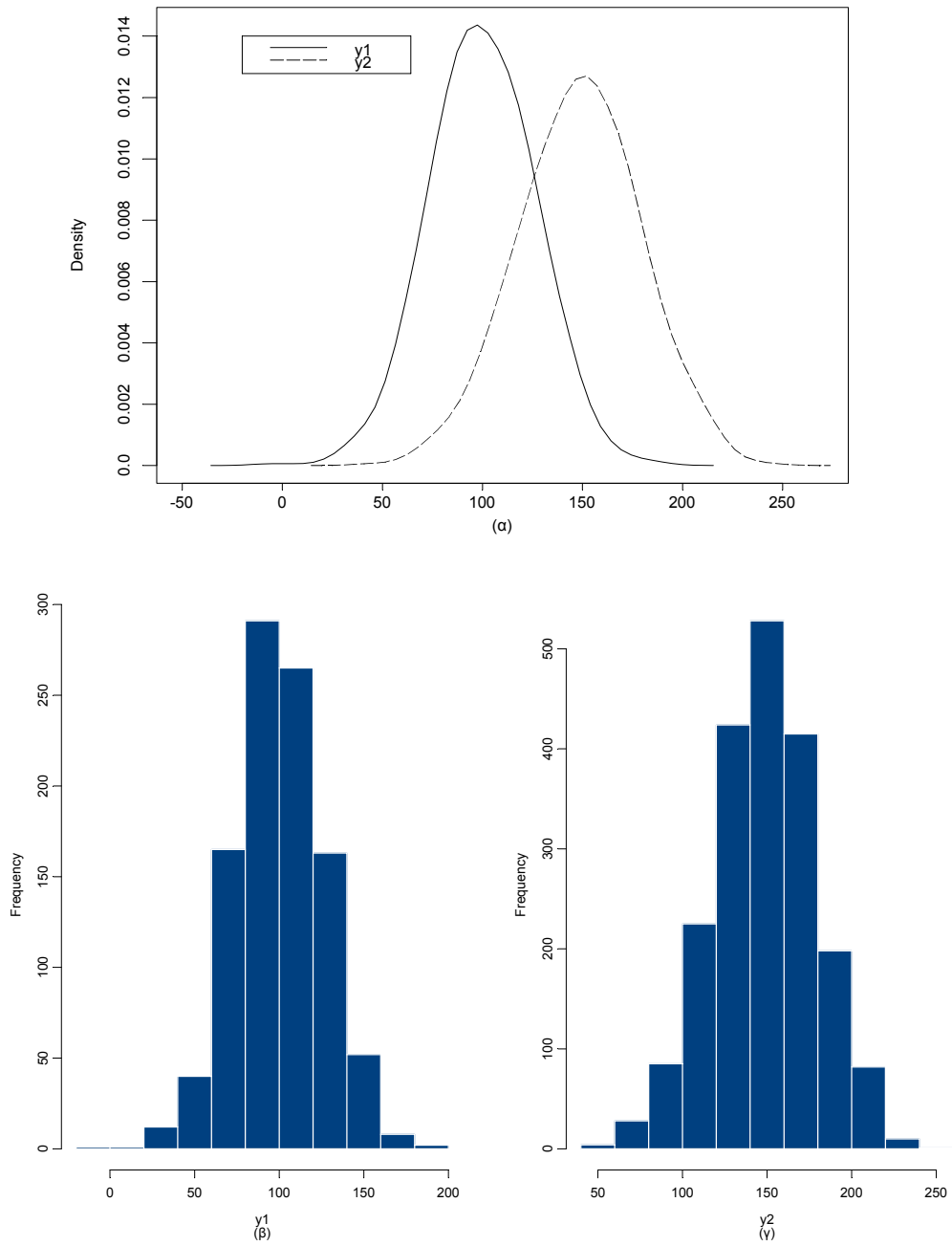
Διάγραμμα 4.39: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου μ_1 και β) του μ_2.*



Διάγραμμα 4.40: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF και (β) της εκ των υστέρων πιθανότητας μοντέλου m_0 σε σχέση με το C ($1< C < 1.5 \cdot 10^6$).*

<u>Παράδειγμα 4.10</u>: Προσομοιωμένα δεδομένα (9)

Προσομοιώνουμε 1000 παρατηρήσεις (y_{1i}) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 100, τυπική απόκλιση 25 και 2000 παρατηρήσεις (y_{2i}) με μέση τιμή 150, τυπική απόκλιση 30. Τα αντίστοιχα διαγράμματα πυκνότητας των μεταβλητών δίνονται στο διάγραμμα 4.41:

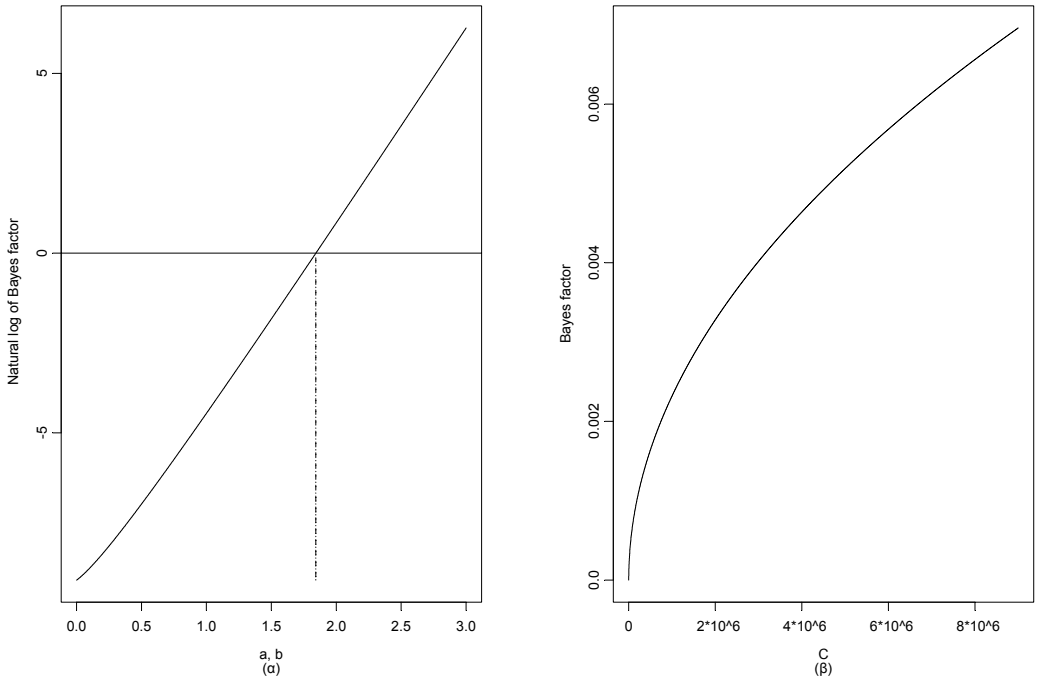


Διάγραμμα 4.41: *α) Διαγράμματα πυκνότητας β), γ) ιστογράμματα των παρατηρήσεων του παραδείγματος 4.10*

Τα δύο δείγματα προέρχονται από κατανομές και θεωρούμε $y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Αρχικά θα ελεγχθεί η ισότητα των διασπορών των δύο κατανομών. Για τις παραμέτρους του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης επιλέγουμε τις εκ των προτέρων κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 3 \cdot \sigma^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 1.5 \cdot \sigma^2\right)$, $\sigma^2 \sim IG\left(1.01, 0.51\right)$, ενώ για το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης (τύπος 4.4) επιλέγουμε τις κατανομές $\mu_1 \sim N\left(0, 3 \cdot \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(0, 1.5 \cdot \sigma_2^2\right)$ $\sigma_1^2 \sim IG\left(0.68, 0.18\right)$, $\sigma_2^2 \sim IG\left(0.84, 0.34\right)$. Όμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα επιλέξαμε $C=n_1+n_2=3000$, $\alpha=b=0.01$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.

Στον πίνακα 4.12, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου, όπως υπολογίστηκαν από τη ρουτίνα *bayesnormal.var* στο S-Plus (βλ. παράρτημα σελ. 167). Ο παράγοντας Bayes είναι BF = $\dfrac{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_0\right)}{f\left(\boldsymbol{y} \mid m_1\right)}$ = $1.15 \cdot 10^{-4} < 1$ άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη ότι απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση, *δηλαδή οι διασπορές των δύο κατανομών δε μπορούν να θεωρηθούν ίσες*.

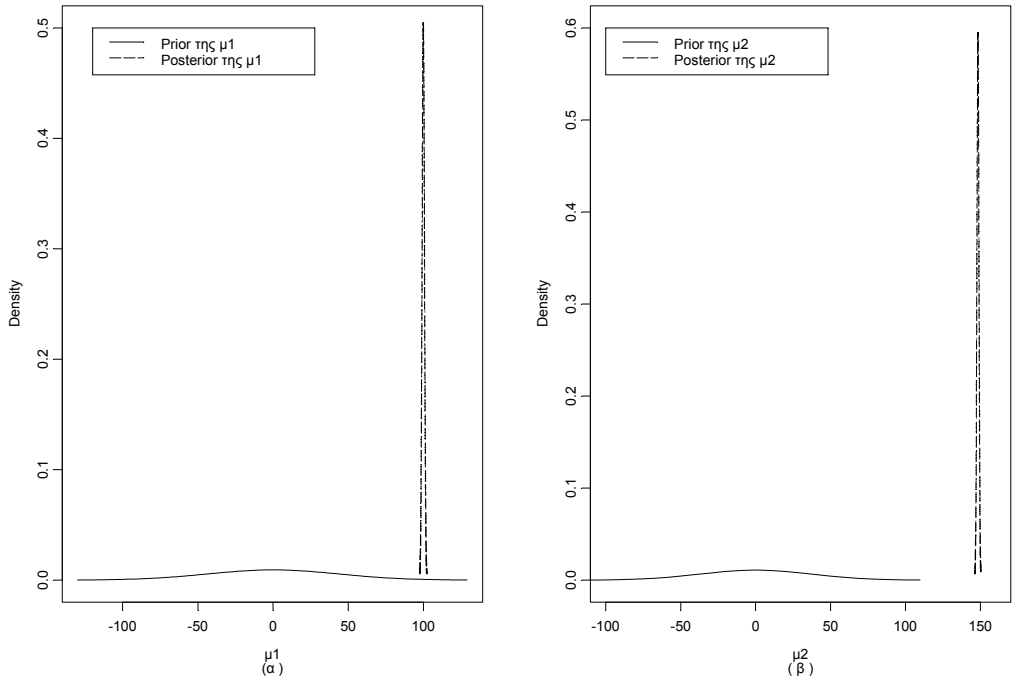
Με την εφαρμογή της ρουτίνας *plotbf5.alpha* θα εξετάσουμε την ευαισθησία του λογάριθμος του παράγοντα Bayes, για τιμές των α, b από 10^{-10} έως 3, διάγραμμα 4.42.α. Για τιμές των α,b μεγαλύτερες του 1.84 υπολογίζεται αρνητικός λογάριθμου, δηλαδή είναι το διάστημα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Επιπλέον, εξετάσαμε την ευαισθησία των τιμών του παράγοντα Bayes για διάφορες τιμές του C (ρουτίνα *plotbf5.C*, παράρτημα σελ. 169). Στο διάγραμμα 4.42.β, παρουσιάζεται ο παράγοντας Bayes για τιμές του C από 1 ως $9 \cdot 10^6$, όταν $a = \beta = 10^{-10}$ και $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$. Παρατηρούμε, το εύρος των τιμών του είναι ($1.17 \cdot 10^{-71}$, $6.96 \cdot 10^{-3}$). Όλες οι τιμές του είναι μικρότερες της μονάδας οπότε, υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης για όλες τις τιμές του C που δοκιμάσαμε.



Διάγραμμα 4.42: *Διαγράμματα για τον έλεγχο της ευαισθησίας του (α) log-BF σε σχέση με το α=b (10^{-10} < α,b < 3) και του β) BF σε σχέση με το C (1< C < 9*10^6).*

Θεωρώντας τις διασπορές των δειγμάτων γνωστές, $\sigma_1^2 = 625$ και $\sigma_2^2 = 900$, θα ελέγξουμε την ισότητα των μέσων. Επιλέγουμε τις εξής εκ των προτέρων κατανομές για τις παραμέτρους κάθε μοντέλου $\mu \sim N(0, 784.9)$, $\mu_1 \sim N(0, 1875)$, $\mu_2 \sim N(0, 1350)$, δηλαδή C=3000.

Ο παράγοντας Bayes του μοντέλου m_0 έναντι του m_1, που υπολογίστηκε από τη ρουτίνα *bayesnormal.2sample.t3* στο S-Plus, (πίνακας 4.13) είναι πολύ μικρός αριθμός (logBF<-500) άρα υπάρχει κατηγορηματική ένδειξη έναντι του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης. Επομένως, *οι μέσες τιμές των δύο κατανομών δε θεωρούνται ίσες* και οι εκ των υστέρων κατανομές που δίνονται από το θεώρημα του Bayes, (πίνακας 4.14) είναι $\mu_1 \mid \boldsymbol{y} \sim N(99.9, 0.625)$ με 95% διάστημα αξιοπιστίας [98.32 , 101.42], $\mu_2 \mid \boldsymbol{y} \sim N(148.4, 0.45)$ με αντίστοιχο διάστημα [147.08 , 149.71]. Στα διαγράμματα 4.43 εμφανίζονται οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής για κάθε παράμετρο.



Διάγραμμα 4.43: *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ των προτέρων και εκ των υστέρων κατανομής α) του μέσου μ_1 και β) του μ_2.*

Πίνακες

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	Ένδειξη έναντι της H_0
Παρ. 4.8	$2.61 \cdot 10^{-20}$	-45.09	$3.83 \cdot 10^{19}$	$2.61 \cdot 10^{-20}$		Κατηγορ.
Παρ. 4.9	$6.94 \cdot 10^{-16}$	-34.90	$1.44 \cdot 10^{15}$	$6.94 \cdot 10^{-16}$		Κατηγορ.
Παρ. 4.10	$1.15 \cdot 10^{-4}$	-9.07	$8.70 \cdot 10^{3}$	$1.15 \cdot 10^{-4}$		Κατηγορ

Πίνακας 4.12: *Τα αποτελέσματα του έλεγχου της ισότητας διασπορών των παρ. 4.8 - 4.10*
BF_{01}: Παράγοντας Bayes, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, $1/BF_{01}$: Αντίστροφος του παράγοντα Bayes, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, Ε.ε.H_1: Ένδειξη έναντι της H_1, Ε.ε.H_0: Ένδειξη έναντι της H_0.

	BF_{01}	$log(BF_{01})$	$1/BF_{01}$	$f(m_0\|y)$	Ένδειξη έναντι της H_1	Ένδειξη έναντι της H_0
Παρ. 4.8	0.02	-3.78	43.75	0.02		Ισχυρή
Παρ. 4.9	0.08	-2.48	11.89	0.08		Θετική
Παρ. 4.10	$<7.12 \cdot 10^{-218}$	-1091.6		$<7.12 \cdot 10^{-218}$		Κατηγορ.

Πίνακας 4.13: *Αποτελέσματα των ελέγχών της ισότητας των μέσων των παρ. 4.8 - 4.10*
BF_{01}: Παράγοντας Bayes, $log(BF_{01})$: Λογάριθμος του παράγοντα Bayes, $1/BF_{01}$: Αντίστροφος του παράγοντα Bayes, $f(m_0|y)$: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, Ε.ε.H_1: Ένδειξη έναντι της H_1, Ε.ε.H_0: Ένδειξη έναντι της H_0.

	Παρ. 4.8		*Παρ 4.9*		*Παρ 4.10*	
	$\tilde{m}$	σ'	$\tilde{m}$	σ'	$\tilde{m}$	σ'
μ	5.16	0.474	0.19	0.702	128.08	0.511
μ_1	5.66	0.494	-1.72	0.894	99.87	0.790
μ_2	-0.78	1.697	3.29	1.134	148.39	0.671

Πίνακας 4.14: *Εκ των υστέρων εκτιμήσεις των παραμέτρων των παρ. 4.8 - 4.10*
m': Εκ των υστερών μέσος, σ': Εκ των υστερών σταθερή απόκλιση.

4.1.5 Έλεγχος υποθέσεων ισότητας των μέσων τιμών δύο πληθυσμών κανονικής κατανομής με άνισες άγνωστες διασπορές.

Στην περίπτωση του ελέγχου των μέσων τιμών δύο κανονικών πληθυσμών με άνισες άγνωστες διασπορές μπορούμε να θεωρήσουμε τις εκ των προτέρων κατανομές για τις μέσες που υπολογίσαμε με τη βοήθεια των πλασματικών δεδομένων στην αντίστοιχη περίπτωση των γνωστών διασπορών (παράγραφος 4.1.4). Για τις παραμέτρους των διασπορών μπορούμε να επιλέξουμε για τη εκ των προτέρων κατανομή την αντίστροφη Γάμμα με παραμέτρους α, b αφού οι παράμετροι αυτοί δε βρίσκονται στις υποθέσεις ελέγχου. Παρατηρούμε ότι κατά τον υπολογισμό της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου της μηδενική υπόθεσης εμφανίζονται ολοκληρώματα που δε μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Δηλαδή δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συζυγή εκ των προτέρων κατανομή για τη μέση τιμή αυτού του μοντέλου, ώστε να υπολογιστεί η εκ των υστέρων κατανομή. Συνεπώς δε μπορεί να γίνει ο έλεγχος υποθέσεων στην περίπτωση αυτή όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις που παρουσιάσαμε. Προτείνουμε να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι Markov Chain Monte Carlo και εφαρμογή του WINBUGS.

4.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων τεστ σημαντικότητας και Μπεϋζιανών

Θέλοντας να γίνει μια σύγκριση μεταξύ αποτελεσμάτων των τεστ σημαντικότητας και των εκ των υστέρων πιθανοτήτων για τον έλεγχο υποθέσεων παρουσιάζεται ο πίνακας 4.15. Στον πίνακα αυτό συνοψίζονται οι τιμές του

παράγοντα Bayes που υπολογίσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα για τον έλεγχο της ισότητας διασπορών και μέσων. Στη διπλανή στήλη βλέπουμε τα αποτελέσματα που θα είχαμε αν είχαμε εργαστεί με τα αντίστοιχα τεστ σημαντικότητας. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο τεστ αφού υποστηρίζουν τις ίδιες υποθέσεις. Υπάρχει μια διαφωνία στα αποτελέσματα, του έλεγχου της ισότητας των μέσων του παραδείγματος 4.5, υπολογίστηκε παράγοντας Bayes 1.95 ο οποίος καταδεικνύει πολύ μικρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της μηδενικής υπόθεσης. Από το αντίστοιχο τεστ σημαντικότητας υπολογίζεται p-value = 0.023 σύμφωνα με το οποίο απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

	Έλεγχος ισότητας διασπορών		***Έλεγχος ισότητας μέσων***	
	BF	***p-value***	***BF***	***p-value***
Παρ. 4.1	$7.68 \cdot 10^{-8}$	<0.001	-	-
Παρ. 4.2	75.43	0.599	$1.45 \cdot 10^{-19}$	<0.001
Παρ. 4.3	417.61	0.595	4.53	0.055
Παρ. 4.4	168.39	0.128	21.25	0.362
Παρ. 4.5	6.75	0.809	**1.95**	**0.023**
Παρ. 4.6	126.33	0.521	2.46	0.102
Παρ. 4.7	6.03	0.209	$5.33 \cdot 10^{-8}$	<0.0001
Παρ. 4.8	$2.61 \cdot 10^{-20}$	<0.0001	0.02	0.0004
Παρ. 4.9	$6.94 \cdot 10^{-16}$	<0.0001	0.08	0.0004
Παρ. 4.10	$1.15 \cdot 10^{-4}$	<0.0001	$<7.12 \cdot 10^{-218}$	<0.0001

Πίνακας 4.15: *Τα αποτελέσματα των τεστ σημαντικότητας και Μπεϋζιανών ελέγχων.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συζήτηση και Περαιτέρω Έρευνα

Στην εργασία αυτή αναπτύχθηκαν πλήρως οι Μπεϋζιανές προσεγγίσεις για τον έλεγχο υποθέσεων της ισότητας μέσων τιμών και διαπορών δειγμάτων που προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς. Σκοπός ήταν να αναπτυχθούν οι μέθοδοι που περιγράφονται παραπάνω με όσο πιο απλό και κατανοητό τρόπο και σε συνδυασμό με τις συναρτήσεις που κατασκευάστηκαν στο S-PLUS να αποτελέσουν ένα εύχρηστο εργαλείο στο χέρι κάθε ερευνητή.

Δόθηκε ιδιαίτερη σημασία, στην επιρροή της εκ των προτέρων κατανομής στην επιλογή του τελικού μοντέλου. Στους ελέγχους ισότητας των μέσων τιμών επιλέξαμε την κανονική κατανομή να περιγράφει την εκ των προτέρων πληροφορία τους, με διασπορά ανάλογη της διασποράς του δείγματος και της σταθεράς C η οποία εκφράζει το βαθμό εμπιστοσύνης στα πλασματικά δεδομένα. Από τα γραφήματα ευαισθησίας του παράγοντα Bayes ως προς τι τιμές της σταθεράς C, δηλαδή ως προς τις τιμές της εκ των προτέρων διασποράς της μέσης τιμής, παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές του C που εξετάσαμε υποστηρίζεται το ίδιο μοντέλο. Δε συμβαίνει το ίδιο στα παραδείγματα 4.8, 4.9, 4.10 όπου παρατηρούμε ότι υποστηρίζεται το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης αλλά για τιμές του C πάνω από μια αρκετά μεγάλη τιμή υποστηρίζεται η μηδενική υπόθεση. Αυτό συμβαίνει γιατί τυχαίνει στα παραδείγματα αυτά τα δείγματα να έχουν πολύ μεγάλες διασπορές, συνεπώς όπως εύκολα συμπεραίνουμε από τη σχέση που υπολογίζει τον παράγοντα Bayes (σελ. 132) αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές του.

Από το αντίστοιχο γράφημα ευαισθησίας στο παράδειγμα 4.3, για μικρές τιμές της σταθεράς C (< 44) υποστηρίζεται η εναλλακτική υπόθεση και για μεγαλύτερες η μηδενική. Δεδομένου όμως ότι θέλουμε η σταθερά να παίρνει μεγάλες τιμές, της τάξεως του αθροίσματος του μεγέθους των δειγμάτων (εδώ $n_1+n_2=1000$), εμπιστευόμαστε το αντίστοιχο αποτέλεσμα. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι

εξακολουθεί να υποστηρίζεται το ίδιο μοντέλο καθώς αλλάζουν οι τιμές της εκ των προτέρων διασποράς, όταν η σταθερά C παίρνει μεγάλες τιμές.

Στους ελέγχους ισότητας των διασπορών δύο δειγμάτων κανονικής κατανομής, επιλέξαμε την αντίστροφη Γάμμα κατανομή να περιγράφει την εκ των προτέρων πληροφορία. Ο παράγοντας Bayes που υπολογίζεται σε αυτή την περίπτωση, εξαρτάται μεταξύ άλλων και από τις τιμές των παραμέτρων α, b και C. Κατά την αριθμητική εφαρμογή θεωρήσαμε ότι η σταθερά C παίρνει μεγάλες τιμές ώστε να αντανακλάται όσο δυνατόν λιγότερη πληροφορία από τα πλασματικά δεδομένα. Για τις παραμέτρους α, b θεωρήσαμε πολύ μικρές τιμές (της τάξεως του 10^{-2}) ώστε να εξασφαλίσουμε μεγάλη διασπορά της εκ των προτέρων κατανομής. Από τα αντίστοιχα γραφήματα ευαισθησίας του παράγοντα Bayes παρατηρούμε ότι σε γενικές γραμμές δεν αλλάζει το συμπέρασμα για το μοντέλο που υποστηρίζεται, δεδομένου ότι τα α, b κυμαίνονται από 10^{-10} έως 2 και το C παίρνει τιμές κοντά στο άθροισμα του μεγέθους των δειγμάτων.

Τέλος, έγινε μια σύγκριση των αποτελεσμάτων που είχαμε από τις εκ των υστέρων πιθανότητες και αυτών που θα είχαμε αν είχαμε χρησιμοποιήσει τα τεστ σημαντικότητας. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια συμφωνία στα αποτελέσματα (πίνακες 3.9 και 4.15), εκτός από τον έλεγχο της ισότητας των μέσων του παραδείγματος 4.5 όπου ο παράγοντας Bayes καταδεικνύει μικρή ένδειξη υπέρ του μοντέλου της αρχικής υπόθεσης, ενώ το τεστ σημαντικότητας έναντι αυτής.

Στην εργασία αυτή περιγράφηκαν οι βασικοί έλεγχοι υποθέσεων κατά Bayes οι οποίοι μπορούσαν να ολοκληρωθούν με τη χρήση συζυγών ή ακατάλληλων εκ των προτέρων κατανομών ενώ οι εκ των υστέρων πιθανότητες μπορούσαν να υπολογιστούν εύκολα. Ενδιαφέρον θέμα για περαιτέρω έρευνα μπορεί να αποτελέσει ο έλεγχος υποθέσεων στην περίπτωση δύο κανονικών πληθυσμών με άνισες και άγνωστες διασπορές. Στην περίπτωση αυτή οι αριθμητικές πράξεις δεν είναι δυνατό να επιλυθούν αναλυτικά με τις μεθόδους που ήδη χρησιμοποιήθηκαν αλλά απαιτείται η χρήση μεθόδων Markov Chain Monte Carlo.

Επίσης, ενδιαφέρουσα συνέχεια της εργασίας θα ήταν η γενίκευση των αποτελεσμάτων για την περίπτωση των 1,…, k δειγμάτων όπου θα ελεγχθεί η ισότητα των μέσων τιμών ή των διασπορών τους. Τέλος ολοκληρώνοντας όλες τις περιπτώσεις κανονικών πληθυσμών μπορούν να γίνουν οι αντίστοιχοι έλεγχοι για τις περιπτώσεις πληθυσμών από άλλες κατανομές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράρτημα Α

Εκ των προτέρων κατανομές δύναμης για Ελέγχους Υποθέσεων

Έλεγχος Ισότητας Ακριβειών ή Διασπορών

Έστω ότι έχουμε δύο ομάδες παρατηρήσεων $\mathbf{y}_1^* = (y_{11}^*, y_{12}^*, \cdots, y_{1n_1}^*)^T$ και $\mathbf{y}_2^* = (y_{21}^*, y_{22}^*, \cdots, y_{2n_2}^*)^T$ όπου n_1^* και n_2^* είναι το πλήθος των παρατηρήσεων σε κάθε ομάδα. Στην παράγραφο που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε πλασματικά δεδομένα και το θεώρημα του Bayes για να κατασκευάσουμε λογικές εκ των προτέρων κατανομές για τις περιπτώσεις όπου οι δύο ομάδες παρατηρήσεων έχουν την ίδια ή διαφορετική παράμετρο ακρίβειας τ, ($\tau=\sigma^{-2}$).

Υπό την προϋπόθεση των ίσων ακριβειών θεωρούμε τις κατανομές $y_{1i}^* \sim N\left(\mu_1, \frac{1}{\tau}\right)$, $y_{2i}^* \sim N\left(\mu_2, \frac{1}{\tau}\right)$ και επιλέγουμε τις εκ των προτέρων πληροφορίες να περιγράφονται από τις κατανομές $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \sigma_0^2\tau^{-1}\right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \sigma_0^2\tau^{-1}\right)$, $\tau \sim G(a,b)$.

Εφόσον θα χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω πλασματικά δεδομένα $\mathbf{y}^* = (\mathbf{y}_1^{*T}, \mathbf{y}_2^{*T})^T$ για να φτιάξουμε την εκ-των-προτέρων κατανομή, χρησιμοποιούμε και μια παράμετρο C που θα ελέγχει το βαθμό που πιστεύουμε και εμπιστευόμαστε τα πλασματικά μας δεδομένα.

Έτσι θα χρησιμοποιήσουμε ως εκ των προτέρων κατανομές τις εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων που θα προκύψουν από τη σχέση $f(\mu_1, \mu_2, \tau \mid \boldsymbol{y}^*) \propto \left\{ f(\boldsymbol{y}^* \mid \mu_1, \mu_2, \tau) \right\}^{\frac{1}{C}} f(\mu_1, \mu_2, \tau)$, όταν θα ελέγξουμε την ισότητα των ακριβειών (ή αντίστοιχα διασπορών) των πραγματικών συνόλων δεδομένων. Με την παράμετρο C σταθμίζουμε το βαθμό συμμετοχής των πλασματικών δεδομένων στην τελική εκ των υστέρων κατανομή $f(\mu_1, \mu_2, \tau | \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{y})$. Οι πιθανές τιμές της παραμέτρου C=1 ,…, $n_1^*+n_2^*$. Αν επιλέξουμε $C=n_1^*+n_2^*$ είναι σαν

να δίδουμε βάρος στα πλασματικά δεδομένα ίσο μία παρατήρηση. Η σταθερά σ_0^2 εμπεριέχεται στην εκ των προτέρων διασπορά των μέσων τιμών οπότε θα λαμβάνει αρκετά μεγάλες τιμές δεδομένου ότι επιθυμούμε μη πληροφοριακές εκ των προτέρων κατανομές. Υπολογίζουμε τις εκ των υστέρων κατανομές και θεωρώντας $\sigma_0^2 \to \infty$, καταλήγουμε στις κατανομές των παραμέτρων:

$$f(\mu_j \mid \boldsymbol{y}^*, \tau) \sim N\left(\bar{y}_j^*, \frac{C}{n_j^*}\tau^{-1}\right),\ f(\tau \mid \boldsymbol{y}^*) \sim G\left(a + \frac{n_1^* + n_2^*}{2C} + \frac{1}{2}, \frac{n_1^* S_1^{*2} + n_2^* S_2^{*2}}{2C} + b\right) \quad (5.1)$$

όπου j = 1, 2 και $S_1^{*2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(y_{1i}^* - \bar{y}_1^*\right)^2$, $S_2^{*2} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_{2i}^* - \bar{y}_2^*\right)^2$.

Όμοια, αν υποθέσουμε άνισες διασπορές τότε $y_{1i}^* \sim N\left(\mu_1, \frac{1}{\tau_1}\right)$, $y_{2i}^* \sim N\left(\mu_2, \frac{1}{\tau_2}\right)$ και οι εκ των προτέρων κατανομές κάθε παραμέτρου θα είναι $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \sigma_0^2\tau_1^{-1}\right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \sigma_0^2\tau_2^{-1}\right)$, $\tau_1 \sim G(a_1, b_1)$, $\tau_2 \sim G(a_2, b_2)$. Έτσι προκύπτουν οι εκ των υστέρων κατανομές με βάση τα πλασματικά δεδομένα με την εφαρμογή του τύπου $f(\mu_1, \mu_2, \tau_1, \tau_2 \mid \boldsymbol{y}^*) \propto \left\{f(\boldsymbol{y}^* \mid \mu_1, \mu_2, \tau_1, \tau_2)\right\}^{\frac{1}{C}} f(\mu_1, \mu_2, \tau_1, \tau_2)$, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν περαιτέρω ως εκ των προτέρων κατανομές. Επιθυμούμε μεγάλη εκ των προτέρων διασπορά για τη μέση τιμή, οπότε θεωρούμε $\sigma_0^2 \to \infty$ και για ευκολία στις πράξεις $a = a_1 = a_2$, $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

$$f(\mu_j \mid \tau_j, \boldsymbol{y}^*) \propto N\left(\bar{y}_j^*, \frac{C}{n_j^*}\tau_j^{-1}\right),\ f(\tau_j \mid \boldsymbol{y}^*) \propto G\left(a + \frac{1}{2} + \frac{n_j^*}{2C}, \frac{n_j^* S_j^{*2}}{2C} + b\right)$$

όπου $S_j^{*2} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ji}^* - \bar{y}_j^*\right)^2$ και $j = 1, 2$

Στο εξής οι εκ των προτέρων κατανομές που θα χρησιμοποιούμε για τις παραμέτρους δυο δειγμάτων κανονικής κατανομής όταν ελέγχουμε την ισότητα των διασπορών τους θα δίνονται από τους τύπους (5.1) και (5.2):

$$\mu_j \mid \tau \sim N\left(\underset{\sim}{m}_j, \frac{C}{n_j}\tau^{-1}\right), \tau \sim G\left(a + \frac{n_1 + n_2}{2C} + \frac{1}{2}, \frac{n_1 S_1^{*2} + n_2 S_2^{*2}}{2C} + b\right)$$

$$\tau_j \sim G\left(a+\frac{1}{2}+\frac{n_j}{2C},\frac{n_j S_j^{*2}}{2C}+b\right), \text{ j = 1,2} \qquad (5.2)$$

Κατά την αριθμητική εφαρμογή στα παρακάτω παραδείγματα, η σταθερά C αντικαθίσταται με το μέγεθος του δείγματος n_1+n_2, ώστε να αντανακλά όσο το δυνατό λιγότερη πληροφορία από τα πλασματικά δεδομένα. Επίσης στα α, b δίνουμε τιμές πολύ μικρές (της τάξεως 10^{-2}) ώστε να εξασφαλίζουμε μεγάλη διασπορά στην εκ των προτέρων κατανομή της ακρίβειας και θεωρούμε αυθαίρετα $S_1^{*2} = S_2^{*2} = 1$.

Έλεγχος Ισότητας Μέσων δύο πληθυσμών με ίσες ακρίβειες

Έστω ότι έχουμε δύο ομάδες παρατηρήσεων $\boldsymbol{y}_1^* = (y_{11}^*, y_{12}^*, \cdots, y_{1n_1}^*)^T$ και $\boldsymbol{y}_2^* = (y_{21}^*, y_{22}^*, \cdots, y_{2n_2}^*)^T$ όπου n_1^* και n_2^* είναι το πλήθος των παρατηρήσεων σε κάθε ομάδα. Θα ακολουθηθεί ανάλογη διαδικασία με την προηγούμενη όταν οι δύο ομάδες παρατηρήσεων έχουν την ίδια ή διαφορετική μέση τιμή με ίσες και γνωστές ακρίβειες.

Υπό την προϋπόθεση της ίδιας μέσης τιμής, θεωρούμε τις κατανομές $y_{1i}^* \sim N\left(\mu,\frac{1}{\tau}\right)$, $y_{2i}^* \sim N\left(\mu,\frac{1}{\tau}\right)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m},\sigma_0^2\tau^{-1}\right)$. Από τον τύπο $f(\mu \mid \boldsymbol{y}^*) \propto f(\boldsymbol{y}^* \mid \mu)^{\frac{1}{C}} f(\mu)$ και για την περίπτωση $\sigma_0^2 \to \infty$ θα υπολογιστεί η εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου

$$\mu \mid \boldsymbol{y}^* \sim N\left(\frac{n_1^*\bar{y}_1^* + n_2^*\bar{y}_2^*}{n_1^* + n_2^*}, \frac{C}{n_1^* + n_2^*}\tau^{-1}\right)$$

Όμοια, αν υποθέσουμε διαφορετικές μέσες τιμές για κάθε πληθυσμό $y_{1i}^* \sim N\left(\mu_1,\frac{1}{\tau}\right)$, $y_{2i}^* \sim N\left(\mu_2,\frac{1}{\tau}\right)$ οι εκ των προτέρων κατανομές για κάθε παράμετρο θα είναι $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1,\sigma_0^2\tau^{-1}\right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2,\sigma_0^2\tau^{-1}\right)$. Οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων που προκύπτουν από τη σχέση

$f(\mu_1,\mu_2 \mid \boldsymbol{y}^*) \propto \left\{ f(\boldsymbol{y}^* \mid \mu_1,\mu_2) \right\}^{\frac{1}{C}} f(\mu_1,\mu_2)$ για $\sigma_0^2 \to \infty$ είναι $\mu_1 \mid \boldsymbol{y}^* \sim N\left(\bar{y}_1^*, \frac{C}{n_1^*}\tau^{-1} \right)$ και $\mu_2 \mid \boldsymbol{y}^* \sim N\left(\bar{y}_2^*, \frac{C}{n_2^*}\tau^{-1} \right)$.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις εκ των υστέρων κατανομές που μόλις υπολογίσαμε, ως εκ των προτέρων κατανομές για το πραγματικό σύνολο δεδομένων.

$$\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{n_1+n_2}\tau^{-1} \right),\ \mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C}{n_1}\tau^{-1} \right)\ \mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C}{n_2}\tau^{-1} \right) \qquad (5.3)$$

Κατά την αριθμητική εφαρμογή στα παρακάτω παραδείγματα, η σταθερά C αντικαθίσταται με το μέγεθος του δείγματος n_1+n_2, ώστε να αντανακλά όσο το δυνατό λιγότερη πληροφορία από τα πλασματικά δεδομένα και να εκφράζει έτσι την αβεβαιότητα μας σε αυτά.

Στην περίπτωση που κάθε ομάδα παρατηρήσεων προέρχονται από κατανομές με ίσες και άγνωστες ακρίβειας οι εκ των πρότερων κατανομές που θα χρησιμοποιούνται για τις παραμέτρους των μέσων τιμών θα είναι ίδιες με παραπάνω. Για την ακρίβεια η εκ των προτέρων πληροφορία θα ερμηνεύεται από την κατανομή $\tau \sim G(a,b)$, δεδομένου ότι η εκ των προτέρων που επιλέγουμε για την άγνωστη παράμετρο τ^{-1} δεν επηρεάζει σημαντικά την εκ των υστέρων κατανομή όταν τα α, b λαμβάνουν πολύ μικρές τιμές. (Kass and Raftery, 1995).

Έλεγχος Ισότητας Μέσων δύο πληθυσμών με άνισες και γνωστές ακρίβειες

Έστω ότι έχουμε δύο ομάδες παρατηρήσεων $\boldsymbol{y}_1^* = (y_{11}^*, y_{12}^*, \cdots, y_{1n_1}^*)^T$ και $\boldsymbol{y}_2^* = (y_{21}^*, y_{22}^*, \cdots, y_{2n_2}^*)^T$ όπου n_1^* και n_2^* είναι το πλήθος των παρατηρήσεων σε κάθε ομάδα. Με τη χρήση των πλασματικών δεδομένων και του θεωρήματος του Bayes, θα υπολογιστούν οι εκ των υστέρων κατανομές όταν οι δύο ομάδες παρατηρήσεων έχουν την ίδια ή διαφορετική μέση τιμή με άνισες και γνωστές διασπορές.

Υπό την προϋπόθεση της ίδιας μέσης τιμής, θεωρούμε τις κατανομές $y_{1i}^* \sim N\left(\mu, \sigma_1^2\right)$, $y_{2i}^* \sim N\left(\mu, \sigma_2^2\right)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \sigma_0^2\sigma^2\right)$. Από τον τύπο $f(\mu \mid \boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y}^* \mid \mu)^{\frac{1}{C}} f(\mu)$ και για την περίπτωση

$\sigma_0^2 \to \infty$ θα υπολογιστεί η εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου

$$\mu \mid \boldsymbol{y}^* \sim N\left(\frac{\frac{n_1 \overline{y}_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 \overline{y}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}}, \frac{C}{\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}} \right)$$

Όμοια, αν υποθέσουμε διαφορετικές μέσες τιμές για κάθε πληθυσμό $y_{1i}^* \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$, $y_{2i}^* \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$ οι εκ των προτέρων κατανομές θα είναι $\mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \sigma_0^2 \sigma_1^2\right)$, $\mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \sigma_0^2 \sigma_2^2\right)$. Οι εκ των υστέρων κατανομές των παραμέτρων που προκύπτουν από τη σχέση $f(\mu_1, \mu_2 \mid \boldsymbol{y}^*) \propto \left\{ f(\boldsymbol{y}^* \mid \mu_1, \mu_2) \right\}^{\frac{1}{C}} f(\mu_1, \mu_2)$ για $\sigma_0^2 \to \infty$ είναι $\mu_1 \mid \boldsymbol{y}^* \sim N\left(\overline{y}_1^*, \frac{C\sigma^2}{n_1^*} \right)$ και $\mu_2 \mid \boldsymbol{y}^* \sim N\left(\overline{y}_2^*, \frac{C\sigma^2}{n_2^*} \right)$.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις εκ των υστέρων κατανομές που μόλις υπολογίσαμε, ως εκ των προτέρων κατανομές για το πραγματικό σύνολο δεδομένων.

$$\mu \sim N\left(\underset{\sim}{m}, \frac{C}{\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}} \right), \ \mu_1 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_1, \frac{C\sigma_1^2}{n_1} \right), \ \mu_2 \sim N\left(\underset{\sim}{m}_2, \frac{C\sigma_2^2}{n_2} \right) \qquad (5.4)$$

Κατά την αριθμητική εφαρμογή στα παρακάτω παραδείγματα, η σταθερά C αντικαθίσταται με το μέγεθος του δείγματος n_1+n_2, ώστε να αντανακλά όσο το δυνατό λιγότερη πληροφορία από τα υποθετικά δεδομένα.

Παράρτημα Β

Συναρτήσεις στο S-PLUS

⇨ *bayesnormal.mean1*

Η συνάρτηση `bayesnormal.mean1` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας της μέσης τιμής ενός δείγματος κανονικής κατανομής με την τιμή μ_0, δηλαδή $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της $H_1 : \mu \neq \mu_0$ για $y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ με γνωστή διασπορά σ^2. Τα αποτελέσματα δίδονται σε ένα αντικείμενο λίστα της γλώσσας S. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
bayesnormal.mean1(y,mu0=0,sigma2=1,prior.mean=0,C=100,q=0.05)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`y` : διάνυσμα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος του δείγματος και όχι το διάνυσμα των δεδομένων, αντικαθιστούμε το διάνυσμα y με το διάνυσμα c(mean, s.d, n), δηλαδή y=c(mean, s.d, n).

Προαιρετικές μεταβλητές:

`mu0` : η μέση τιμή της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή μ_0.

`sigma2` : η γνωστή διασπορά του δείγματος

`prior.mean` : εκ των προτέρων μέσος της παραμέτρου μ.

`C`: με την τιμή της καθορίζουμε το μέγεθος της εκ των προτέρων διασποράς της παραμέτρου μ.

`q`: το ποσοστημόριο για το οποίο θα υπολογιστεί το 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας της παραμέτρου που εκτιμάται.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : Παράγοντας Bayes της H_0 έναντι της H_1.

`Posterior probability` : Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

`mean, s.d, var`: μέση τιμή, σταθερή απόκλιση και διασπορά της εκ των υστέρων κατανομής της παραμέτρου μ.

`lci, uci`: Κάτω και άνω όριο του 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας της παραμέτρου μ.

❖ Η συνάρτηση *bayesnormal.mean1* αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 3.1.1 και εφαρμόζεται για τους ελέγχους υποθέσεων των παραδειγμάτων 3.1 και 3.2 με τις εντολές:

```
bayesnormal.mean1(example3.1,mu0=15,sigma2=16,prior.mean=15,C=
1000)
bayesnormal.mean1(example3.2,mu0=10,sigma2=36,prior.mean=10,C=
300)
```

⇨ *plotbf1*

Η συνάρτηση `plotbf1` παριστάνει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του ή της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0 που υπολογίζονται από τη συνάρτηση `bayesnormal.mean1`, σε σχέση με τις τιμές της σταθεράς C. Καλείται με την εντολή:

```
plotbf1(clow=1,chi=100,step=1,a=1,y,mu0=0,sigma2=1,prior.mean=
0)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`y` : το διάνυσμα των δεδομένων

εναλλακτικά : αντικαθιστούμε το διάνυσμα y με το διάνυσμα (mean, s.d, n), στην περίπτωση που δε δίνεται το διάνυσμα των δεδομένων.

Προαιρετικές μεταβλητές:

`c2low, c2hi, step` : η ακολουθία τιμών του C, με αρχή το c2low, τέλος το c2hi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a`: λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, Log(bf) range, post.prob range` : το έυρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα.

❖ Η συνάρτηση `plotbf1` χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των αντίστοιχων γραφημάτων στα παραδείγματα 3.1 και 3.2 με τις εντολές:

```
plotbf1(1,10^6,100,1,example3.1,mu0=15,sigma2=16,prior.mean=15
)
plotbf1(50,90000,10,2,example3.2,mu0=10,sigma2=36,prior.mean=1
0)
```

⇨ *plotm01*

Η συνάρτηση `plotm01` παριστάνει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογάριθμό του ή της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.mean1` ως προς τις τιμές του μ_0. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotm01(mlow=1, mhi=100, step=1, a=1, y, sigma2=1, C=100)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`y` : το διάνυσμα των δεδομένων

εναλλακτικά : αντικαθιστούμε το διάνυσμα y = c(mean, s.d, n), στην περίπτωση που δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος του δείγματος των δεδομένων.

Προαιρετικές μεταβλητές:

`mlow, mhi, step` : η ακολουθία τιμών του μ_0, με αρχή το mlow, τέλος το mhi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το έυρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα.

`mu0 for Bf>1` : δίνονται οι τιμές του μ_0 για τις οποίες υπολογίζεται παράγοντας Bayes μεγαλύτερος της μονάδας, δηλαδή δίνεται το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης.

❖ Η συνάρτηση `plotm01` χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των αντίστοιχων γραφημάτων στα παραδείγματα 3.1 και 3.2 με τις εντολές:

```
plotm01(mlow = 12, mhi = 18, step = 0.1, a = 3, example3.1,
sigma2 = 16, C = 1000)
plotm01(mlow = -5, mhi = 5, step = 0.01, a = 2, example3.2 ,
sigma2 = 36, C = 300)
```

⇨ *bayesnormal.mean2*

Η συνάρτηση `bayesnormal.mean2` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας της μέσης τιμής ενός δείγματος κανονικής κατανομής με την τιμή μ_0, δηλαδή $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της $H_1 : \mu \neq \mu_0$ για $y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ με άγνωστη διασπορά σ^2. Τα αποτελέσματα δίδονται σε ένα αντικείμενο λίστα της γλώσσας S-PLUS. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
bayesnormal.mean2(y, mu0 = 0, prior.mean = 0, C = 100, alpha =
0.01, beta = 0.01, q = 0.05)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`y` : το διάνυσμα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος του δείγματος και όχι το διάνυσμα των δεδομένων, αντικαθιστούμε το διάνυσμα y = c(mean, s.d, n).

Προαιρετικές μεταβλητές:

`mu0` : η μέση τιμή της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή μ_0.

`prior.mean` : ο εκ των προτέρων μέσος της παραμέτρου μ.

`C` : η σταθερά που καθορίζει το μέγεθος της εκ των προτέρων διασποράς της παραμέτρου μ.

`alpha` : η παράμετρος της μορφής της αντίστροφης γάμμα κατανομής.

`beta` : η παράμετρος της κλίμακας της αντίστροφης γάμμα κατανομής.

`q` : το ποσοστημόριο για το οποίο θα υπολογιστεί το 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας κάθε παραμέτρου που εκτιμάται.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : Παράγοντας Bayes της H_0 έναντι της H_1.

`Posterior probability` : Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

`mean, s.d, var` : Μέση τιμή, σταθερή απόκλιση και διασπορά της εκ των υστέρων κατανομής της παραμέτρου μ.

`sigma2.m0` : οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της εκ των υστέρων κατανομής της παραμέτρου σ^2 κάτω από το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης.

`sigma2.m1` : οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της εκ των υστέρων κατανομής της παραμέτρου σ^2 κάτω από το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης.

`L.C.I, U.C.I` : Κάτω και άνω όριο του 100(1-q)% διαστήματος αξιοπιστίας κάθε παραμέτρου.

❖ Η συνάρτηση *bayesnormal.mean2* αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 3.1.2 και εφαρμόζεται για τους ελέγχους υποθέσεων των παραδειγμάτων 3.3, 3.4 και 3.5, με τις εντολές:

```
bayesnormal.mean2(aimosf, mu0 = 10000, prior.mean = 10000,
C=7, alpha=0.01, beta = 0.01)
bayesnormal.mean2(example3.4, mu0=299990, prior.mean=299990,
C=20, alpha=0.01, beta=0.01)
bayesnormal.mean2(c(1.3,0.3,36), 1.1, 1.1 , 36, 0.01, 0.01)
```

⇨ *plotbf2*

Η συνάρτηση `plotbf2` εξετάζει την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του ή της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.mean2` ως προς τις τιμές του C. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotbf2(Clow = 1, Chi = 100, step = 1, a = 1, y, mu0 = 0,
prior.mean = 0, alpha = 0.01, beta = 0.01)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`y` : το διάνυσμα των δεδομένων

εναλλακτικά : θέτουμε το διάνυσμα y = c(mean, s.d, n), στην περίπτωση που δε δίνεται το διάνυσμα των δεδομένων.

Προαιρετικές μεταβλητές:

`Clow, Chi, step` : η ακολουθία των τιμών της C, με αρχή το Clow, τέλος το Chi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα.

⇨ *plotm02*

Η συνάρτηση `plotm02` παριστάνει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του ή της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.mean2` ως προς τις τιμές του μ_0. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotm02(mlow = 1, mhi = 100, step = 1, a = 1, y, C = 100,
alpha = 0.01, beta = 0.01)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`y` : το διάνυσμα των δεδομένων

εναλλακτικά : θέτουμε το διάνυσμα y = c(mean, s.d, n), στην περίπτωση που δε δίνεται το διάνυσμα των δεδομένων.

Προαιρετικές μεταβλητές:

`mlow, mhi, step` : η ακολουθία των τιμών του μ_0, με αρχή της ακολουθίας το mlow, τέλος το mhi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

`mu0 for Bf>1` : δίνονται οι τιμές του μ_0 για τις οποίες υπολογίζεται παράγοντας Bayes μεγαλύτερος της μονάδας, δηλαδή δίνεται το διάστημα μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης

⇨ *bayesnormal.pairedtest1*

Η συνάρτηση `bayesnormal.pairedtest1` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας της μέσης τιμής της διαφοράς των παρατηρήσεων δύο δειγμάτων που συσχετίζονται μεταξύ τους, με την τιμή μηδέν, όταν αυτή προέρχεται από κανονική κατανομή γνωστής διασποράς. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

bayesnormal.pairedtest1(d, sigma2 = 1, prior.mean = 0, C = 100)

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`d` : η διαφορά των παρατηρήσεων των δύο δειγμάτων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος της διαφοράς των παρατηρήσεων, αντικαθιστούμε το διάνυσμα d με το διάνυσμα (mean, s.d, n).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`sigma2` : η διασπορά της κατανομής της διαφοράς των παρατηρήσεων

`prior.mean` : ο μέσος της εκ των προτέρων κατανομής της παραμέτρου μ_d.

`C` : η σταθερά της διασπορά της εκ των προτέρων κατανομής της παραμέτρου μ_d, κατά την υλοποίηση του ελέγχου αντικαθίσταται με το μέγεθος του δείγματος.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : Παράγοντας Bayes που υπολογίστηκε ως προς το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης $\frac{P(\boldsymbol{y} \mid m_0)}{P(\boldsymbol{y} \mid m_1)}$. Για τιμές του παράγοντα Bayes μεγαλύτερες της μονάδας δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση και για τιμές μικρότερες της μονάδας την απορρίπτουμε.

`Posterior probability`: Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, $f(m_0|y)=\frac{Bf}{1+Bf}$. Εδώ, το κρίσιμο σημείο για το οποίο απορρίπτουμε ή όχι τη μηδενική υπόθεση είναι το 0.5.

`mean, s.d, var` : Μέση τιμή, σταθερή απόκλιση και διασπορά της εκ των υστέρων κατανομής της παραμέτρου μ_d.

❖ Η συνάρτηση `bayesnormal.pairedtest1` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 3.2.1.

⇨ *<u>plotbf6</u>*

Η συνάρτηση `plotbf6` αποδίδει γραφικά τον παράγοντα Bayes, το λογάριθμό του, ή την εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.pairedtest1` για διάφορες τιμές της σταθεράς c^2. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotbf6(Clow = 1, Chi = 100, step = 1, a = 1, d, sigma2 = 1,
prior.mean = 0)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`d` : η διαφορά των παρατηρήσεων των δύο δειγμάτων

εναλλακτικά : αντικαθιστούμε το διάνυσμα d με το διάνυσμα (mean, s.d, n), στην περίπτωση που δε δίνονται τα διανύσματα των δεδομένων.

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`Clow, Chi, step` : κατασκευάζεται μια ακολουθία τιμών, τις οποίες παίρνει το C, με αρχή της ακολουθίας το Clow, τέλος το Chi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της ακολουθίας. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

⇨ *bayesnormal.pairedtest2*

Η συνάρτηση `bayesnormal.pairedtest2` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας της μέσης τιμής της διαφοράς των παρατηρήσεων δύο δειγμάτων που συσχετίζονται μεταξύ τους, με την τιμή μηδέν, όταν αυτή προέρχεται από κανονική κατανομή άγνωστης διασποράς. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

bayesnormal.pairedtest2(d, prior.mean = 0, C = 100, alpha = 0.01, beta = 0.01, q = 0.05)

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`d` : η διαφορά των παρατηρήσεων των δύο δειγμάτων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος της διαφοράς των παρατηρήσεων, αντικαθιστούμε το διάνυσμα d με το διάνυσμα c(mean, s.d, n).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`prior.mean` : εκ των προτέρων μέσος της παραμέτρου μ_d.

`C` : η σταθερά που καθορίζει το μέγεθος της εκ των προτέρων διασποράς της παραμέτρου μd.

`alpha` : η παράμετρος της μορφής της εκ των προτέρων κατανομής της διασποράς.

`beta` : η παράμετρος της κλίμακας της εκ των προτέρων κατανομής της διασποράς.

`q` : το ποσοστημόριο για το οποίο θα υπολογιστεί το 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας κάθε παραμέτρου που εκτιμάται.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : παράγοντας Bayes της H_0 έναντι της H_1.

`Posterior probability` : εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

`mean, s.d, var` : μέση τιμή, σταθερή απόκλιση και διασπορά της εκ των υστέρων κατανομής της παραμέτρου μ_d.

`sigma2.m0` : οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της εκ των υστέρων κατανομής του σ^2 κάτω από το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης.

`sigma2.m1` : οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της εκ των υστέρων κατανομής του σ^2 κάτω από το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης

`L.C.I, U.C.I` : Κάτω και άνω όριο του 100(1-q)% διαστήματος αξιοπιστίας κάθε παραμέτρου.

❖ Η συνάρτηση `bayesnormal.pairedtest2` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 3.2.2 και χρησιμοποιείται για του έλεγχους υποθέσεων στα παραδείγματα 3.6, 3.7 και 3.8.

```
bayesnormal.pairedtest2(aspA-
aspB,prior.mean=0,C=10,alpha=0.01,beta=0.01)
bayesnormal.pairedtest2(week0-
week1,prior.mean=0,C=8,alpha=0.01,beta=0.01)
bayesnormal.pairedtest2(doctor.A-
doctor.B,prior.mean=0,C=32,alpha=0.01,beta=0.01)
```

⇨ *plotbf7*

Η συνάρτηση `plotbf7` αποδίδει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογάριθμό του ή της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.pairedtest2` ως προς τις τιμές του C. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotbf7(Clow = 1, Chi = 100, step = 1, a = 1, d, prior.mean =
0, alpha = 0.01, beta = 0.01)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`d` : η διαφορά των παρατηρήσεων των δύο δειγμάτων

εναλλακτικά : αντικαθιστούμε το διάνυσμα d με το διάνυσμα (mean, s.d, n), στην περίπτωση που δε δίνονται τα διανύσματα των δεδομένων.

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`Clow, Chi, step` : ακολουθία των τιμών του C, με αρχή της ακολουθίας το c2low, τέλος το c2hi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

❖ Η συνάρτηση `plotbf7` χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των αντίστοιχων γραφημάτων στα παραδείγματα 3.6, 3.7 και 3.8 με τις αντίστοιχες εντολές:

```
plotbf7(Clow =1, Chi=20, step=0.1, a=1,aspA-
aspB,prior.mean=0,alpha=0.01,beta=0.01)
plotbf7(Clow=1,Chi=100,step=1, a=3,week0-
week1,prior.mean=0,alpha=0.01,beta=0.01)
plotbf7(1,1000,1,3,doctor.A-
doctor.B,prior.mean=0,alpha=0.01,beta=0.01)
```

⇨ *bayesnormal.2sample.t1*

Η συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t1` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας των μέσων δύο δειγμάτων που προέρχονται από κανονικές κατανομές με ίσες και γνωστές διασπορές. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
bayesnormal.2sample.t1(y1, y2, sigma2 = 1, prior.mean.mu = 0,
prior.mean.mu1 = 0, prior.mean.mu2 = 0, C = 100, q = 0.05)
```

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων, αντικαθιστούμε κάθε διάνυσμα με y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`sigma2` : η διασπορά των κατανομών που προέρχονται τα δείγματα

`prior.mean.mu, prior.mean.mu1, prior.mean.mu2` : ο εκ των προτέρων μέσος των παραμέτρων μ, μ_1 και μ_2, αντιστοίχα.

`C` : η σταθερά που καθορίζει τα μεγέθη των εκ των προτέρων διασπορών των παραμέτρων μ, μ_1 και μ_2 αντιστοίχως.

`q` : το ποσοστημόριο για το οποίο θα υπολογιστεί το 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας κάθε παραμέτρου που εκτιμάται.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : παράγοντας Bayes της H_0 έναντι της H_1.

`Posterior probability` : εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

`mu, mu1, mu2` : εκ των υστέρων εκτιμήσεις της κατανομής της παραμέτρου μ_d για κάθε μοντέλο

❖ Η συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t1` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.2 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.2, 4.3, 4.4 με τις αντίστοιχες εντολές:

```
bayesnormal.2sample.t1(example4.2[[1]],example4.2[[2]],sigma2=
25,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0,C=450)
bayesnormal.2sample.t1(example4.3[[1]],example4.3[[2]],sigma2=
289,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0,C=1000)
bayesnormal.2sample.t1(example4.4[[1]],example4.4[[2]],sigma2=
400,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0,C=1000)
```

⇨ *plotbf3*

Η συνάρτηση `plotbf3` παριστάνει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογάριθμό του ή την εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t1` ως προς τις τιμές της σταθεράς C. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotbf3(Clow = 1, Chi = 100, step = 1, a = 1, y1, y2, sigma2 =
1, prior.mean.mu = 0, prior.mean.mu1 = 0, prior.mean.mu2 = 0)
```

Προαπαιτούμενες μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : θέτουμε y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2) για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων.

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`Clow, Chi, step` : η ακολουθία των τιμών του C, με αρχή της ακολουθίας το c2low, τέλος το c2hi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

❖ Η συνάρτηση `plotbf3` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.2 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.2, 4.3, 4.4 με τις αντίστοιχες εντολές:

```
plotbf3(1,9*10^7,100000,2,example4.2[[1]],example4.2[[2]],sigm
a2=25,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0)
plotbf3(1,1*10^6,3,1,example4.3[[1]],example4.3[[2]],sigma2=28
9,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0)
plotbf3(1,10^6,1,1,example4.4[[1]],example4.4[[2]],sigma2=400,
prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0)
```

⇨ *bayesnormal.2sample.t2*

Η συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t2` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας των μέσων δύο δειγμάτων που προέρχονται από κανονικές κατανομές με ίσες και άγνωστες διασπορές. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
bayesnormal.2sample.t2(y1, y2, prior.mean.mu = 0,
prior.mean.mu1 = 0, prior.mean.mu2 = 0, C = 100, alpha = 0.01,
beta = 0.01, q = 0.05)
```

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων, αντικαθιστούμε κάθε διάνυσμα με y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`prior.mean.mu, prior.mean.mu1, prior.mean.mu2` : εκ των προτέρων μέσος των παραμέτρων μ, μ_1 και μ_2 αντιστοίχως.

`C` : η σταθερά που καθορίζει τα μεγέθη των εκ των προτέρων διασπορών των παραμέτρων μ, μ_1 και μ_2 αντιστοίχως.

`alpha, beta` : παράμετροι μορφής και κλίμακας της εκ των προτέρων κατανομής της διασποράς

`q` : το ποσοστημόριο για το οποίο θα υπολογιστεί το (1-q)% διάστημα αξιοπιστίας κάθε παραμέτρου που εκτιμάται.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : Παράγοντας Bayes της H_0 έναντι της H_1.

`Posterior probability` : Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

`mu, mu1, mu2` : εκ των υστέρων εκτιμήσεις κατανομής κάθε παραμέτρου

`sigma2.m0` : οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της εκ των υστέρων κατανομής του σ^2 κάτω από το μοντέλο της μηδενικής υπόθεσης.

`sigma2.m1` : οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της εκ των υστέρων κατανομής του σ^2 κάτω από το μοντέλο της εναλλακτικής υπόθεσης

❖ Η συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t2` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.3 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.5, 4.6 και 4.7 με τις αντίστοιχες εντολές:

```
bayesnormal.2sample.t2(treat,contr,prior.mean.mu=0,prior.mean.
mu1=0,prior.mean.mu2=0,C=30,alpha=0.01,beta=0.01)
bayesnormal.2sample.t2(omada.A,omada.B,prior.mean.mu=0,prior.m
ean.mu1=0,prior.mean.mu2=0,C=20,alpha=0.01,beta=0.01)
bayesnormal.2sample.t2(fev0,fev1,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu
1=0,prior.mean.mu2=0,C=654,alpha=0.01,beta=0.01)
```

⇨ *plotbf4*

Η συνάρτηση `plotbf4` παριστάνει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογάριθμου του ή της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t2` ως προς τις τιμές της σταθεράς C. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

plotbf4(Clow = 1, Chi = 100, step = 1, a = 1, y1, y2, prior.mean.mu = 0,
prior.mean.mu1 = 0, prior.mean.mu2 = 0, alpha = 0.01, beta = 0.01)

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : θέτουμε y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2) για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων.

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`Clow, Chi, step` : η ακολουθία των τιμών του C, με αρχή της ακολουθίας το Clow, τέλος το Chi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

❖ Η συνάρτηση `plotbf4` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.3 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.5, 4.6 και 4.7 με τις αντίστοιχες εντολές:

```
plotbf4(1,1000,1,3,treat,contr,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=
0,prior.mean.mu2=0,alpha=0.01,beta=0.01)
plotbf4(1,400,1,3,omada.A,omada.B,prior.mean.mu=0,prior.mean.m
u1=0,prior.mean.mu2=0,alpha=0.01,beta=0.01)
plotbf4(1,427716,0.1,3,fev0,fev1,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu
1=0,prior.mean.mu2=0,alpha=0.01,beta=0.01)
```

⇨ *bayesnormal.2sample.t3*

Η συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t3` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας των μέσων δύο δειγμάτων που προέρχονται από κανονικές κατανομές με άνισες και γνωστές διασπορές. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

bayesnormal.2sample.t3(y1, y2, sigma12 = 1, sigma22 = 1, prior.mean.mu = 0, prior.mean.mu1 = 0, prior.mean.mu2 = 0, C = 100, q = 0.05)

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων, αντικαθιστούμε κάθε διάνυσμα με y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`sigma12, sigma22` : η γνωστή διασπορά της κατανομής κάθε δείγματος

`prior.mean.mu, prior.mean.mu1, prior.mean.mu2` : ο εκ των προτέρων μέσος κατανομής των παραμέτρων μ, μ_1 και μ_2 αντιστοίχως.

`C` : η σταθερά που καθορίζει τα μεγέθη των εκ των προτέρων διασπορών των παραμέτρων μ, μ_1 και μ_2 αντιστοίχως

`q` : το ποσοστημόριο για το οποίο θα υπολογιστεί το 100(1-q)% διάστημα αξιοπιστίας κάθε παραμέτρου που εκτιμάται.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : Παράγοντας Bayes που υπολογίστηκε για την υπόθεση H_0 έναντι της H_1.

`Posterior probability` : Εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

`mu, mu1, mu2` : εκ των υστέρων εκτιμήσεις της κατανομής κάθε παραμέτρου.

❖ Η συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t3` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.4 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.8, 4.9, και 4.10 με τις αντίστοιχες εντολές:

```
bayesnormal.2sample.t3(example4.8[[1]],example4.8[[2]],sigma12
=49,sigma22=289,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,
prior.mean.mu2=0, C=300)
bayesnormal.2sample.t3(example4.9[[1]],example4.9[[2]],sigma12
=400,sigma22=900,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.m
u2=0,C=1200)
bayesnormal.2sample.t3(example4.10[[1]],example4.10[[2]],sigma
12=625,sigma22=900,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,
prior.mean.mu2=0, C=3000)
```

⇨ *plotbf8*

Η συνάρτηση `plotbf8` απεικονίζει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, το λογάριθμό του, ή την εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, που

υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.2sample.t3` ως προς τις τιμές της σταθεράς C. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotbf8(Clow=1,Chi=100,step=1,a=1,y1,y2,sigma12=1,sigma22=1,pr
ior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0)
```

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων, θέτουμε κάθε διάνυσμα με y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`Clow, Chi, step` : η ακολουθία των τιμών της C, με αρχή της ακολουθίας το Clow, τέλος το Chi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

❖ Η συνάρτηση `plotbf8` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.3 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.8, 4.9 και 4.10 με τις αντίστοιχες εντολές:

```
plotbf8(1,27*10^5,100,3,example4.8[[1]],example4.8[[2]],sigma1
2=49,sigma22=289,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean.m
u2=0)
plotbf8(1,1.5*10^6,100,3,example4.9[[1]],example4.9[[2]],sigma
12=400,sigma22=900,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean
.mu2=0)
```

```
plotbf8(1,9*10^6,100,2,example4.10[[1]],example4.10[[2]],sigma
12=625,sigma22=900,prior.mean.mu=0,prior.mean.mu1=0,prior.mean
.mu2=0)
```

⇨ *bayesnormal.var*

Η συνάρτηση `bayesnormal.var` ελέγχει την υπόθεση της ισότητας των διασπορών δύο δειγμάτων που προέρχονται από κανονικές κατανομές. Η συνάρτηση καλείται με την ακόλουθη εντολή:

bayesnormal.var(y1, y2, alpha = 0.01, beta = 0.01, prior.mean.mu1 = 0, prior.mean.mu2 = 0, s1 = 1, s2 = 1, C = 100)

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων, αντικαθιστούμε κάθε διάνυσμα με y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`alpha, beta` : παράμετροι μορφής και κλίμακας της εκ των προτέρων κατανομής της διασποράς των πλασματικών δειγμάτων

`prior.mean.mu1, prior.mean.mu2` : ο εκ των προτέρων μέσος των παραμέτρων μ_1 και μ_2 αντιστοίχως

`s1, s2`: η τυπική απόκλιση για κάθε πλασματικό δείγμα

`C` : η σταθερά που καθορίζει το βαθμό της εκ των προτέρων διασποράς των παραμέτρων μ_1 και μ_2 αντιστοίχως.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bayes factor` : παράγοντας Bayes που υπολογίστηκε για την υπόθεση H_0 έναντι της H_1.

`Posterior probability`: εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

`mu1.m0, mu2.m0, mu1.m1, mu2.m1` : εκ των υστέρων εκτιμήσεις της κατανομής των μέσων τιμών κάτω από κάθε υπόθεση

`sigma2, sigma12, sigma22` : οι εκτιμήσεις της εκ των υστέρων κατανομής των διασπορών για κάθε μοντέλο.

❖ Η συνάρτηση `bayesnormal.var` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.1 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.1.

```
bayesnormal.var(example4.1[[1]],example4.1[[2]],alpha=0.01,bet
a=0.01,prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0,C=1800)
```

⇨ *plotbf5.alpha*

Η συνάρτηση `plotbf5.alpha` παριστάνει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογάριθμού του ή την εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.var` ως προς τις τιμές των παραμέτρων a,b και την περίπτωση a=b. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotbf5.alpha(alow=1,ahi=100,step=1,a=1,y1,y2,prior.mean.mu1=0
,prior.mean.mu2=0,s1=1,s2=1,C=100)
```

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων, αντικαθιστούμε κάθε διάνυσμα με y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2).

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`alow, ahi, step` : η ακολουθία των τιμών των a, b με αρχή της ακολουθίας το alow, τέλος το ahi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δε δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

`a,b for bf<1` : δίνεται το διάστημα των τιμών των a, b για τα οποία υπολογίζεται παράγοντας Bayes μικρότερος της μονάδας.

❖ Η συνάρτηση `plotbf5.alpha` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.1 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.1.

```
plotbf5.alpha(10^-10,6,0.01,2,example4.1[[1]],example4.1[[2]],
prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0,C=1800)
```

⇨ *plotbf5.C*

Η συνάρτηση `plotbf5.C` παριστάνει γραφικά την ευαισθησία του παράγοντα Bayes, του λογάριθμου του ή της εκ των υστέρων πιθανότητας του μοντέλου m_0, που υπολογίζονται από την συνάρτηση `bayesnormal.var` ως προς τις τιμές της σταθεράς C. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

```
plotbf5.C(Clow=1,Chi=100,step=1,a=1,y1,y2,prior.mean.mu1=0,pri
or.mean.mu2=0,alpha=0.01,beta=0.01,s1=1,s2=1)
```

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`y1, y2` : τα διανύσματα των δεδομένων

εναλλακτικά : θέτουμε y1=c(mean1, s.d1, n1) και y2=c(mean2, s.d2, n2) για την περίπτωση που μας δίνονται μόνο η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το μέγεθος κάθε ομάδας παρατηρήσεων.

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`Clow, Chi, step` : η ακολουθία των τιμών του C, με αρχή της ακολουθίας το Clow, τέλος το Chi και step την απόσταση μεταξύ των τιμών της. Αν κάποια τιμή δεν δίνεται, αντικαθίσταται από την προκαθορισμένη για κάθε όρισμα 1, 100, 1, αντιστοίχως.

`a` : λαμβάνοντας την τιμή 1: αποδίδεται γραφικά ο παράγοντας Bayes, 2: ο λογάριθμος του παράγοντα Bayes και 3: η εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0.

Λίστα των αποτελεσμάτων:

`Bf range, log(bf) range, post.prob range` : το εύρος των τιμών του παράγοντα Bayes, του λογαρίθμου του και της εκ των υστέρων πιθανότητα του μοντέλου m_0, αντίστοιχα

C for bf<1 : το σύνολο των τιμών του C για τα οποία υπολογίζεται Παράγοντας του Bayes μικρότερος της μονάδας

❖ Η συνάρτηση `plotbf5.C` αντιστοιχεί στο κεφάλαιο 4.1.1 και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων των παραδειγμάτων 4.1 με την εντολή:

```
plotbf5.C(Clow=1,Chi=1800^2,step=100,1,example4.1[[1]],example
4.1[[2]],prior.mean.mu1=0,prior.mean.mu2=0,alpha=10^-
7,beta=10^-7,s1=1,s2=1)
```

⇨ *density.t*

Η συνάρτηση `density.t` υπολογίζει την συνάρτηση πυκνότητας ενός διανύσματος της Student's t κατανομής. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

density.t(theta, mean=0, sigma2=1, df)

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`theta` : διανύσματα με τα δεδομένα

`df` : βαθμοί ελευθερίας

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`mean` : μέση τιμή της κατανομής

`sigma2` : διασπορά της κατανομής

⇨ *density.inv.gamma*

Η συνάρτηση `density.inv.gamma` υπολογίζει την συνάρτηση πυκνότητας ενός διανύσματος της αντίστροφης Γάμμα κατανομής. Καλείται με την ακόλουθη εντολή:

density.inv.gamma (theta, alpha=1, beta=1)

Προαπαιτούμενες Μεταβλητές

`theta` : διανύσματα με τα δεδομένα

Προαιρετικές Μεταβλητές:

`alpha, beta`: παράμετροι μορφής και κλίμακας της αντίστροφης Γάμμα κατανομής

Βιβλιογραφία

Δελλαπόρτας, Π. (1998). *Συμπερασματολογία κατά Bayes*. ΜΠΣ Βιοστατιστικής. http://stat-athens.aueb.gr/~ptd/bayes.zip

□□□□□□, □. □□□ Κατσουγιάννη, Κ. (1997). □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□. □π□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □.□. □□□□□□□□□□

Aitkin, M. (1991). Posterior Bayes Factor. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 53, 11-142.

Bartlett, M.S. (1957). Comment on D.V. Lindley's Statistical Paradox. *Biometrika*, 44, 533-534.

Berger, J.O. and Pericchi, L.R. (1996). The Intrinsic Bayes Factor for Model Selection and Prediction. *Journal of the American Statistical Association*, 91, 109-122.

Bernado, J.M. and Smith, A.F.M. (1994). *Bayesian Theory*, Chichester: John Wiley & Sons.

Carlin, B. P. and Louis, T. A. (1998). *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis*, USA: Chapman and Hall.

Gelman, A., Carlin, G.B., Stern, H.S. and Rubin, D.B. (1998). *Bayesian Data* Analysis, London: Chapman and Hall.

George, E.I. and MCCulloch, R.E. (1993). Variable Selection via Gibbs Sampling. *Journal of the* American *Statistical Association*, 88, 881-889.

George, E.I. and MCCulloch, R.E. (1996). Stochastic Search Variable Selection. *Markov Chain Monte* Carlo *in Practice* (W. R. Gilks, S. Richardson, and D.J. Spiegelhalter, eds.). Chapman and Hall, London.

Green, P. (1995). Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination. *Biometrika*, 82, 711-732.

Hoeting, J.A., Madigan, D., Raftery, A.E. and Volinsky, C.T. (1999). Bayesian Model Averaging: A Tutorial. *Statistical Science*, 14, 382-417.

Ibrahim, J. and Chen, M.H. (2000). Power Prior Distributions for Regression Models. *Statistical Science*, 15, 46-60.

Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability*, 3rd ed. Oxford: University Press.

Johnson, D.H. (1999). The Insignificance of Statistical Significance Testing. *J Wildl Manage*, 63, 761-772.

Kass, R.E. and Raftery, A.E. (1995). Bayes Factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773-775.

Laplace, P.S. (1774). "Memoire sur la probabilite des causes par les evenemens". *Mem. Acad. R. Sci. Presentes par Divers Savans*, 6, 621-656.

Lindley, D.V. (1957). A Statistical Paradox. *Biometrika*, 44, 187-192

Lopes, H.F. (2002). *Bayesian Model Selection*. Departamento de Metodos Estatisticos, Universidade Federal do Rio de Janeiro. http://acd.ufrj.br/~hedibert

Madigan, D. and Raftery, A.E. (1994). Model Selection and Accounting for Model Uncertainty in Graphical Models using Occam's Window. *Journal of the American Statistical Association*, 89, 1535-1546.

Mathsoft, (1997). *S-PLUS 4: Guide to Statistics. Data Analysis Products Division*, Mathsoft, Inc. Seattle, Washington.

Ntzoufras, I. (1999). *Aspects of Bayesian Model and Variable Selection Using MCMC*. Athens University of Economics and Statistics. Department of Statistics . PHD Thesis.

O'Hagan, A. (1995). Fractional Bayes Factors for Model Comparison. *Journal of the Royal Statistical Society B,* 57, 99-138.

Press, S. (1989). *Bayesian* Statistics*: Principles, Models and Applications*. John Wiley & Sons.

Raftery, A.E. *Hypothesis Testing and Model Selection Via Posterior Simulation*. University of Washington.

Rosner, B. (1995). *Funtamental of Biostatistics*. Fourth Edition. Duxbury Press.

Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *Annals of Statistics*, 6.

Shafer, G. (1982). Lindley's Paradox. *Journal of the American Statistical Association*, 77, 325-334.

Stigler, S.M (1982). "Thomas Bayes and Bayesian Inference," *J. R. Stat. Soc. (A),* 145(2), 250-258.

Stigler, S.M. (1983). "Who Discovered Bayes Theorem", *Am. Stat*., 37, 290-296.

Stigler, S.M. (1986). *The History of Statistics*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.