2.4 ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η μέθοδος για τον προσδιορισμό ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για την άγνωστη πιθανότητα p=P(A) ενός ενδεχομένου A συνδέεται στενά με τον διωνυμικό έλεγχο.

Ένα δείγμα παρατηρήσεων πάνω σε n ανεξάρτητες δοκιμές εξετάζεται και καταγράφεται η συχνότητα T με την οποία το συγκεκριμένο ενδεχόμενο εμφανίζεται. Οι n δοκιμές είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και η πιθανότητα p του εν λόγω ενδεχομένου παραμένει σταθερή από δοκιμή σε δοκιμή. Είναι προφανές, ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής T είναι η διωνυμική με παραμέτρους n και p. Ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα p είναι προφανές ότι θα αποτελείται από όλες τις τιμές του p_0 οι οποίες είναι τέτοιες ώστε τα δεδομένα του δείγματος θα οδηγούσαν σε μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης

$$H_0 : p = p_0$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : p \neq p_0 .$$

Ειδικότερα, εάν επιθυμούμε την κατασκευή ενός 100(1–α)% διαστήματος εμπιστοσύνης, παρατηρούμε το δείγμα των αποτελεσμάτων των n δοκιμών, καταγράφουμε την τιμή τ της μεταβλητής T και ρωτάμε:

«Για την δοθείσα τιμή τ της μεταβλητής T, ποιες είναι οι τιμές εκείνες που θα μπορούσε να πάρει το p_0 στην υπόθεση

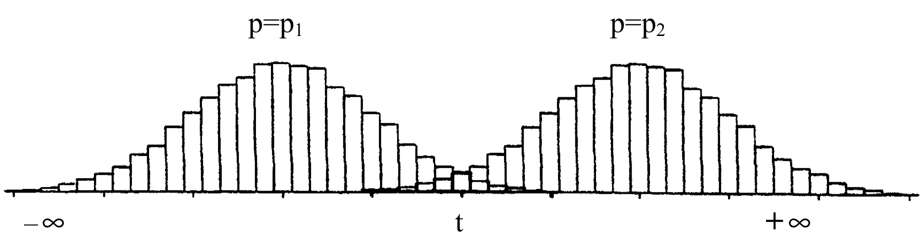
$$H_0 : p = p_0$$

ώστε ένας αμφίδρομος διωνυμικός έλεγχος σε επίπεδο σημαντικότητας α να μην οδηγήσει σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης; »

Το σύνολο αυτών των τιμών αποτελούν το 100(1–α)% διάστημα εμπιστοσύνης. Οι τιμές του p_0 που οδηγούν σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0 δεν θα ανήκουν στο διάστημα εμπιστοσύνης. Επομένως, αν $(p_1,\ p_2)$ είναι ένα 100(1–α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο p, τότε οι προτάσεις «$\not{H}_0$ *σε επίπεδο σημαντικότητας* α» και «$p_0 \notin (p_1,\ p_2)$» είναι ισοδύναμες.

Καθορισμός των Άκρων $p_1,\ p_2$ του 100(1–α)% Διαστήματος Εμπιστοσύνης

Τα άκρα p_1, p_2 του 100(1–α)% διαστήματος εμπιστοσύνης καθορίζονται έτσι ώστε η παρατηρούμενη τιμή τ της μεταβλητής Τ να αποτελεί ταυτόχρονα ακραία τιμή των διωνυμικών μεταβλητών $T_1 \sim \text{διωνυμική}\,(n, p_1)$ και $T_2 \sim \text{διωνυμική}\,(n, p_2)$, δηλαδή $P(T_1 \geq t \mid n,\ \ p = p_1) \cong \alpha/2$ και $P(T_2 \geq t \mid n,\ \ p = p_2) \cong \alpha/2$.



Σχήμα 2.4.1

Επομένως, τα άκρα p_1 και p_2 του διαστήματος εμπιστοσύνης ορίζονται έτσι ώστε

$$P(T \leq t \mid n,\ \ p = p_2) \cong \alpha/2$$

και

$$P(T \geq t \,|\, n, \;\; p = p_1) \cong 1 - \alpha/2$$

ή, ισοδύναμα,

$$P(T \leq t - 1 \,|\, n, p_1) \cong \alpha/2 \,.$$

Επομένως, ο κανόνας απόρριψης του παραπάνω ελέγχου σε επίπεδο σημαντικότητας α μπορεί να διατυπωθεί μέσω του 100(1–α)% διαστήματος εμπιστοσύνης (p_1, p_2) ως εξής:

Η υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α αν $p_0 \notin (p_1, p_2)$.

Παράδειγμα 2.4.1: Ένα τυχαίο δείγμα 10 τέως καπνιστών έδειξε ότι, ένα χρόνο μετά, 6 άτομα ξανάρχισαν το κάπνισμα. Να κατασκευασθεί ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για το πραγματικό ποσοστό των τέως καπνιστών που ξαναρχίζουν το κάπνισμα.

Λύση: Θεωρούμε ως επιτυχία την επιστροφή στο κάπνισμα. Η παρατηρηθείσα τιμή της στατιστικής συνάρτησης Τ= αριθμός τέως καπνιστών που ξανάρχισαν το κάπνισμα είναι τ=6. Έστω p το πραγματικό ποσοστό των τέως καπνιστών, που ξαναρχίζουν το κάπνισμα. Τα άκρα p_1, p_2 του 99% διαστήματος εμπιστοσύνης για το p θα καθορισθούν από τις σχέσεις:

$$P(T \leq 6 \,|\, n = 10, \;\; p = p_2) \cong 0.005$$

και

$$P(T \leq 5 \,|\, n = 10, \;\; p = p_1) \cong 0.995$$

Από τον πίνακα της διωνυμικής κατανομής (πίνακας 1 του παραρτήματος) για n=10 και για την τιμή τ=6 έχουμε ότι η τιμή p_2 του p που αντιστοιχεί στην τιμή 0.005 της πιθανότητας $P(T \leq 6 \mid n = 10,\ p = p_2)$ βρίσκεται στο διάστημα (0.90, 0.95). Συγκεκριμένα,

p:	0.90	p_2	0.95
$P(T \leq 6 \mid n=10, p)$:	0.0128	0.005	0.001

Επομένως, $p_2 = 0.90 + \Delta p$, όπου η τιμή του Δp προκύπτει από την σχέση

$$\frac{\Delta p}{0.95 - 0.9} = \frac{0.0128 - 0.005}{0.0128 - 0.001}$$

ίση με $\Delta p = 0.033$. Επομένως, $p_2 = 0.90+0.033 = 0.933$.

Με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει ότι $p_1 = 0.189$. Κατά συνέπεια, το 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα p είναι το διάστημα (0.189, 0.933).

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα μας ενδιέφερε να ελέγξουμε τις υποθέσεις:

$$H_0: p = 0.5$$

$$H_1: p \neq 0.5,$$

τότε, επειδή $p_0 \in (0.189, 0.933)$, η H_0 δεν θα απορριπτόταν σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση κατά την οποία το μέγεθος n του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο ($n > 20$) και η κατανομή πιθανότητας της στατιστικής συνάρτησης T είναι περίπου συμμετρική ($np \geq 5$) και ($n(1-p) \geq 5$), το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να προσδιορισθεί κατά προσέγγιση με βάση την συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu = np$ και $\sigma^2 = np(1-p)$, η οποία προσεγγίζει την διωνυμική κατανομή της T. Ισχύει, δηλαδή, ότι

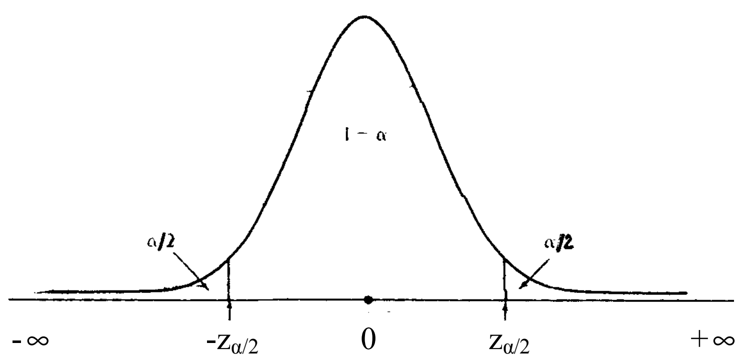
$$\frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1).$$

Η τελευταία σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$P(-z_{1-\alpha/2} < \frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

ή, ισοδύναμα,

$$P\left(\frac{T}{n} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \frac{T}{n} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$



Σχήμα 2.4.2

Τα άκρα του διαστήματος εμπιστοσύνης περιέχουν την άγνωστη παράμετρο p. Είναι βέβαια δυνατόν να γραφεί η ανισότητα με τρόπο ώστε τα άκρα της να είναι ανεξάρτητα του p. Στην πράξη, όμως, επιτυγχάνουμε μία ικανοποιητική προσέγγιση αν αντικαταστήσουμε την παράμετρο p με την εκτιμήτριά της $\frac{T}{n}$. Δηλαδή, το 100(1–α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο p έχει άκρα:

$$\frac{T}{n} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{T/n\,(1-T/n)}{n}}\,.$$

Παράδειγμα 2.4.2: Αν στο παράδειγμα με τους καπνιστές είχαμε ότι στους n=100 τέως καπνιστές τ=60 ξανάρχισαν να καπνίζουν, το 99% διάστημα εμπιστοσύνης θα είχε άκρα

$$\frac{60}{100} + z_{0.995}\sqrt{\frac{60/100\,(1-60/100)}{100}}.$$

Δηλαδή, το 99% διάστημα εμπιστοσύνης θα ήταν το (0.474, 0.726).

Σημείωση: Ο έλεγχος υποθέσεων για την μέση τιμή μιας διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους N και p είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο των υποθέσεων για την παράμετρο p. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι

$$\mu = E(X) = N\,p,$$

από το οποίο συνάγεται ότι

$$\left\{\begin{matrix} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} H_0 : Np = Np_0 \\ H_1 : Np \neq Np_0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{matrix}\right\}.$$